




## Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/21683>

**To cite this version:**

Sakhraoui, Imane  *Application d'un observateur de fonctionnelle linéaire pour la mesure thermique d'une plaque chauffante.* (2017)  
In: Congrès de l'école doctorale GEET, 2017 (Toulouse, France).  
(Unpublished)

Any correspondence concerning this service should be sent  
to the repository administrator: [tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# Application d'un observateur de fonctionnelle linéaire pour la mesure thermique d'une plaque chauffante

Imane SAKHRAOUI

*Laboratoire Génie de production (LGP) 47 avenue d'Azereix, 65000 Tarbes*

Les modules d'électroniques à haute puissance intégrés sont de plus en plus conçus avec l'émergence de nouvelles technologies semi-conductrices. Ainsi, l'augmentation de la fiabilité des modules de puissance induit la connaissance précise de la température locale, même si elle ne peut être mesurée à aucun endroit. Dans cet article, l'application d'un observateur est proposée. Il permet d'estimer la température à n'importe quel endroit en utilisant des mesures fournies par des capteurs thermiques situés à quelques points précis. L'objectif est de concevoir un observateur de taille réduite qui pourrait être implémenté sur une cible intégrée en temps réel telle que le processeur de signal numérique. Par conséquent, ce travail porte attention à la procédure de conception et à la complexité de calcul de l'observateur résultant.

## I. INTRODUCTION

Des études [1], [2] ont montré que la température avait un impact sur la durée de vie des modules d'électronique de puissance. L'estimation des températures locales devient un véritable défi dans la nouvelle génération de modules de puissance pour augmenter leur durée de vie. Ces contraintes augmentent l'apparition de défaillances potentiellement critiques sur le module. Par conséquent, il devient nécessaire d'avoir une connaissance précise des températures à des emplacements spécifiques dans le module, tels que la température des puces semi-conductrices ou des liaisons de fils. Cependant, en raison de taille des capteurs et des perturbations du champ électromagnétique à proximité des points de mesure, l'utilisation de capteurs thermiques peut être difficile à certains endroits à l'intérieur du module d'alimentation. Pour ces raisons, l'objectif du travail est d'estimer cette variable physique dans un endroit spécifique non mesuré, en utilisant des données mesurées par des capteurs.

Comme cas d'étude, un système thermique simple à deux dimensions (2D) est considéré dans cet article, puis modélisé en utilisant une analogie thermique-électrique. Le formalisme d'état nous permettra de représenter les équations d'évolution thermique du système. En utilisant cette représentation, la température peut être estimée à n'importe quel endroit avec un observateur de fonctionnel linéaire.

Section 2 traite la construction d'un modèle thermique et sa représentation d'état. Dans ce travail, le comportement thermique d'une plaque chauffante 2D (30 × 30mm) pouvant représenter une section d'un module d'électronique de

puissance est considéré comme une référence de test de nos techniques. Dans la section 3, la représentation matricielle du modèle précédent est établie et vise à concevoir un observateur de taille réduite. Nous proposons dans la section 4 un moyen de concevoir un observateur, basé sur l'utilisation des dérivées successives des sorties mesurées. L'intérêt de la conception de l'observateur réside dans la possibilité d'observer la température à n'importe quel endroit du système. Enfin, à travers des résultats de simulation, l'application d'un observateur de taille réduite sur la plaque chauffée 2D est validée dans la section 5.

## II. Modèle thermique 2D

L'évolution thermique d'une plaque chauffée 2D est donnée par l'équation de la chaleur (1), [3], [4] Avec :

$T$  est la température locale,  $t$  le temps,  $\rho$  la masse volumique,  $C_p$  la capacité thermique massique,  $\lambda$  la conductivité thermique, et  $s$  la chaleur interne produite par le système.

$$\rho C_p \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = -\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + s \quad (1)$$

L'équation de la chaleur reflète des phénomènes de transferts linéaires comme le transfert conductif et le transfert convectif dus à la présence de gradients de température, [5], [6] présenté par :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (2)$$

$\vec{\varphi}$  représente la densité de flux de chaleur.

Les transferts radiatifs ne sont pas pris en compte dans cette équation. Cependant, dans ce travail, ce type de transfert est négligé. Comme l'équation (2) est similaire à la loi d'Ohm dans le domaine électrique, une analogie thermo-électrique entre les différents domaines peut être résumée dans le

tableau 1, [7]. Cette analogie va nous permettre d'obtenir un modèle électrique équivalent au modèle thermique issu de l'équation de la chaleur, afin de décrire le comportement de la plaque en utilisant les outils classiques d'étude des circuits.

Paramètres	Dom. Therm.		Dom. Elect.	
	Nota.	Uni.	Nota.	Uni.
Echauffement	$\Delta T$	K	$\Delta V$	V
Flux	$Q$	W	I	A
Résistance	$R_{th}$	K/W	$R$	$\Omega$
Capacité	$C_{th}$	J/K	$C$	F

Tab. 1. Analogie entre les grandeurs électriques et thermiques.

Afin de concevoir un observateur à temps continu, la première étape consiste à discrétiser le modèle obtenu en 2D.

Une discrétisation par différences finies, de cette équation montre que le comportement thermique est analogue à celui d'un circuit électrique composé de résistances représentant la conduction caractérisé par une résistance de conduction  $R_{cd}$  (resp. résistance  $R_{cv}$ ), de condensateurs représentant le stockage de l'énergie thermique dans une surface élémentaire modélisé par une capacité thermique  $C_{th}$  connectée entre le centre et la masse (référence thermique), de sources de tension représentant des sources de température et de sources de courant représentant des sources de chaleur  $P_{th}$  peuvent être insérées dans certains éléments pour induire la réponse thermique dynamique du système, [8].

### III. Représentation d'état de la plaque chauffante

À partir de la discrétisation par différences finies de la plaque chauffante, le théorème de Millman [9] permet, pour chaque élément de surface d'exprimer la température  $T$  en son centre en fonction des températures de ses voisins et des impédances thermiques qui caractérisent les différents modes de transfert de chaleur entre les éléments connectés, avec une équation différentielle de premier ordre. En combinant toutes les équations des nœuds, une représentation d'état est obtenue. Ce modèle d'état fournit alors la simulation des températures locales. Contrairement aux expériences, la simulation de ce modèle permet la connaissance de toutes les températures. Par conséquent, l'estimation de la température dans un endroit spécifique non mesuré est nécessaire. Nous proposons donc

d'atteindre cet objectif grâce à des observateurs fonctionnels linéaires.

## IV. Estimation des variables non mesurables

### A. Observateur de fonctionnelle linéaire

Considérons le système décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3)$$

Où, pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , représente le vecteur d'état du modèle,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ , le vecteur des commandes supposées accessibles, et  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ , le vecteur des mesures issues des capteurs.  $A, B$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimensions adaptées. L'objectif est de chercher à estimer au moins asymptotiquement, à partir des informations mesurées sur le système, une composante de l'état :

$$v(t) = Lx(t) \quad (4)$$

Où  $L$  est une matrice de taille  $(l \times n)$  qui permet de sélectionner cette composante. Pour obtenir  $v(t)$  on utilise un reconstructeur, appelé observateur de fonctionnelle linéaire ou observateur de Luenberger [10], [11], décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) + Hy(t) \\ \hat{v}(t) = Pz(t) + Vy(t) \end{cases} \quad (5)$$

Où  $z(t)$  est un vecteur de taille  $q$  et  $\hat{v}(t)$  est un vecteur de taille  $l$ . Les matrices  $F, G, H, P, V$  et l'ordre  $q$  sont déterminés afin que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (v(t) - \hat{v}(t)) = 0$ . Où,  $F$  est une matrice de Hurwitz.

### B. Conception de l'observateur

Cette section traite la recherche de l'ordre minimal d'un observateur fonctionnel. Définissons  $q$  comme le plus petit entier tel que,

$$\text{rang } \Sigma_q = \text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_q \\ LA^q \end{pmatrix} \quad (6)$$

Où :

$$\Sigma_q = (C \quad L \quad CA \quad \dots \quad CA^{q-1} \quad LA^{q-1} \quad CA^q)^T$$

- La conception de l'observateur utilise les dérivations successives de  $v(t)$ , après  $q$  dérivations de  $v(t) = Lx(t)$ , on obtient:

$$v^{(q)}(t) = LA^q x(t) + \sum_{i=0}^{q-1} LA^i B u^{(q-1-i)}(t) \quad (7)$$

D'après (6), il existe donc une combinaison linéaire,  $\Gamma_i$ , pour  $i \in [0; q]$ , et  $\lambda_i$ ,  $i \in [0; q-1]$ , tq:

$$LA^q = \sum_{i=0}^q \Gamma_i CA^i + \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i LA^i \quad (8)$$

Alors :

$$v^{(q)}(t) = \sum_{i=0}^q \Gamma_i CA^i x(t) + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i LA^i x(t) + \sum_{i=0}^{q-1} LA^i Bu^{(q-1-i)}(t) \quad (9)$$

- La deuxième étape consiste à éliminer l'état  $x(t)$  dans l'équation (9) afin que  $v^{(q)}(t)$  s'exprime uniquement en fonction de  $v(t), y(t), u(t)$  et de leurs dérivées successives. Pour ce faire, on utilise l'équation d'état (3) après chaque dérivation de  $v(t) = Lx(t)$  et de  $y(t) = Cx(t)$ , [12].

On arrive à une relation de la forme :

$$v^{(q)}(t) = \sum_{i=0}^q \Gamma_i y^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i v^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{q-1} \Phi_i u^{(i)}(t) \quad (10)$$

Où, pour  $i \in [0; q-2]$ ,

$$\Phi_i = \left[ LA^{q-1-i} - \sum_{j=i+1}^q \Gamma_j CA^{j-i-1} - \sum_{j=i+1}^{q-1} \Lambda_j LA^{j-i-1} \right] B$$

$$\text{Et, } \Phi_{q-1} = [L - \Gamma_q C] B$$

- La troisième étape consiste à transformer l'équation différentielle scalaire (10) en une équation différentielle matricielle du premier ordre, [13], [14], cette équation constitue la représentation d'état de l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \Lambda_0 \\ 1 & \ddots & 0 & \Lambda_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda_{q-1} \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{q-1} \end{pmatrix} u(t) \\ \quad + \begin{pmatrix} \Gamma_0 + \Lambda_0 \Gamma_q \\ \Gamma_1 + \Lambda_1 \Gamma_q \\ \vdots \\ \Gamma_{q-1} + \Lambda_{q-1} \Gamma_q \end{pmatrix} y(t) \\ \hat{v}(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] z(t) + \Gamma_q y(t) \end{cases} \quad (11)$$

Lorsque la matrice  $F$  est une matrice de Hurwitz, on obtient un observateur asymptotique de la fonctionnelle linéaire  $Lx(t)$ . Dans le cas contraire ou si les valeurs propres de la matrice ne conviennent pas, il convient d'augmenter l'ordre  $q$  et de réitérer la réalisation à un ordre plus élevé, [15], [16]

## V. Exemple appliqué sur la plaque

### A. Conception de l'observateur minimal

Nous choisissons une discrétisation des différences finies exprimé par un modèle d'état d'ordre 9. D'après la modélisation thermique de la plaque chauffante, on arrive sur une représentation d'état de la forme (3) défini par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & c & b & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & b & d & b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & b & c & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b & c & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ f & 0 \\ -d & 0 \\ f & 0 \\ 0 & g \\ f & 0 \\ -d & 0 \\ f & 0 \\ -d & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0),$$

$$L = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

Où,  $10^{-3} \times (a = -7.6, b = 1.3, c = -6.4, d = -5.1, f = 2.5)$  et  $g = 0.1276$ .

La structure des matrices  $C, L$  et  $B$  est liée aux emplacements de  $Ca, O$  et  $S$  de la plaque.

### B. Résultats de simulation

La figure (1), montre le résultat de simulation du l'observateur conçu, et le système initial avec conditions initiales non nulles. En pratique, cela peut correspondre à un changement du flux ou de la température ambiante pendant l'expérience. On remarque que la sortie observée converge asymptotiquement vers la température simulée. On peut conclure que cet observateur convient pour estimer la température quelles que soient les conditions initiales.

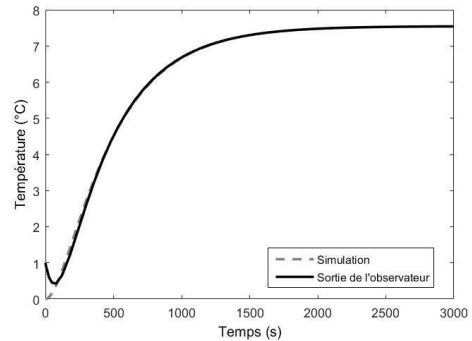


Fig. 1 : Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal, avec conditions initiales non nulles

### Conclusion

Nous avons présenté la modélisation thermique d'une plaque chauffante, à travers la discrétisation par différences finies de l'équation de la chaleur, en arrivant à une représentation d'état du système avec une analogie thermique-électrique. À partir de cette expression d'état, nous avons déterminé une procédure constructive de conception de l'observateur de fonctionnelle linéaire afin d'estimer la température dans des points désirés, ainsi que l'application de ce type d'observateur qui montre une réduction pertinente de l'ordre de l'observateur.