Contextes formels incomplets ou incertains : Vers une généralisation possibiliste de l'analyse formelle de concepts

Incomplete or uncertain contexts : Towards a possibilistic generalization of formal concept analysis

Zina Ait Yakoub[1] Yassine Djouadi[2] Didier Dubois[3] Henri Prade[3]

1. UMMTO, Univ. de Tizi-Ouzou, Dept. Informatique, BP 17, RP, Tizi-Ouzou, Algérie, zina.aityakoub@ummto.dz
2. USTHB, Laboratoire RIIMA, BP 32 El Alia 16111, Alger, Algérie, djouadi@irit.fr
3. IRIT, Univ. Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 09, France, {dubois,prade}@irit.fr

Résumé :

La théorie de l'analyse formelle de concepts est classiquement basée sur l'utilisation de l'opérateur ensembliste de Galois. La similarité formelle entre cette théorie et la théorie des possibilités suggère l'utilisation d'opérateurs possibilistes ignorés jusque-là. Ce papier propose une approche basée sur l'utilisation de compositions asymétriques de certains de ces opérateurs, ce qui permet d'enrichir la base de Duquenne-Guigues par l'obtention d'implications d'attributs à sémantique disjonctive. En outre, cette approche peut être généralisée à des contextes incomplets tout autant qu'à des contextes exprimant une incertitude graduelle.

Mots-clés :

Analyse formelle de concepts, opérateurs possibilistes, contextes incomplets, incertitude graduelle.

Abstract:

Formal concept analysis theory relies classically on the use of the Galois powerset operator. The formal similarity between possibility theory and formal concept analysis, has suggested the use of possibilistic operators, which were ignored before. In this paper, an approach based on the use of asymmetric compositions of some of these possibilistic operators is proposed. It enables us to complete the Duquenne-Guigues basis by achieving attribute implications with disjunctive semantics. Besides, the approach can be naturally generalized to incomplete contexts and then to uncertain contexts where uncertainty is graded.

Keywords:

Formal concept analysis, possibilistic operators, incomplete contexts, gradual uncertainty.

1 Introduction

L'analyse formelle de concepts (AFC) utilise l'opérateur classique de Galois afin d'extraire, à partir d'une relation binaire, un ensemble de concepts formels partiellement ordonnés, conférant ainsi à cet ensemble une structure algébrique de treillis. Une telle structure présente d'intéressantes propriétés permettant la découverte d'implications d'attributs sous la forme $\{a_1, ..., a_n\} \rightarrow \{b_1, ..., b_m\}$ où $a_1, ..., a_n, b_1, ...$ et b_m sont des attributs. La sémantique sous-jacente à de pareilles implications est de type conjonctive. En effet, pour $\{a_1, ..., a_n\} \rightarrow \{b_1, ..., b_m\}$, l'interprétation "$a_1$" et ... et "$a_n$" $\rightarrow$ "b_1" et ... et "b_m" est implicitement admise.

Depuis quelques années, une lecture possibiliste de l'analyse formelle de concepts a été proposée [6] [8]. Ainsi, au-delà de l'opérateur de suffisance classiquement utilisé en AFC, cette interprétation possibiliste permet de considérer trois autres opérateurs (ensemblistes) à savoir, l'opérateur de possibilité, l'opérateur de nécessité, et l'opérateur dual de l'opérateur de suffisance [5] [3]. Dans cet esprit, l'objectif de ce papier est d'étendre la capacité de l'AFC en matière de représentation de connaissances et ce, en considérant des implications d'attributs à sémantique disjonctive au lieu de la sémantique conjonctive jusque-là considérée par les approches existantes [11] (introduit dans [12]). L'approche ainsi proposée dans ce papier considère des paires "ouvert-fermé" obtenues par une composition asymétrique d'opérateurs de nécessité et de possibilité ($\mathrm{N} \circ \Pi$). Une méthode permettant d'induire les implications d'attributs disjonctives sera aussi proposée.

La suite de ce papier est organisée comme suit. La Section 2 présente l'AFC classique et donne sa lecture possibiliste. La Section 3 met en évidence l'intérêt d'utiliser les opérateurs possibilistes afin d'induire des implications d'attributs disjonctives et présente ainsi la première contribution. La section suivante donne une même analyse dédiée aux contextes formels incomplets, tandis que la Section 5 traite des degrés de nécessité dans les contextes formels incertains.

Cet article est la version française d'un article de workshop spécialisé [1].

2 L'analyse formelle de concepts

2.1 Notions de base

L'AFC [11] repose essentiellement sur une relation binaire entre un ensemble d'objets et un ensemble d'attributs. Une telle relation est appelée contexte formel et consiste en un triplet $\mathcal{K}(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ où $\mathcal{O}$ est un ensemble d'object, $\mathcal{P}$ est un ensemble d'attributs, et $\mathcal{R}$ est une relation binaire tel que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{P}$. $x\mathcal{R}a$ signifie que l'objet x vérifie (satisfait ou possède) l'attribut a.

Le paradigme de l'AFC [14] repose classiquement sur la paire d'opérateurs ensemblistes $(.)^{\Delta} : 2^{\mathcal{O}} \to 2^{\mathcal{P}}$ and $(.)^{\Delta} : 2^{\mathcal{P}} \to 2^{\mathcal{O}}$, (plus généralement appelés opérateurs de dérivation de Galois dans la littérature). Etant donnés deux ensembles $X \in 2^{\mathcal{O}}$ et $A \in 2^{\mathcal{P}}$, ces deux opérateurs sont définis comme suit :

$$A^{\Delta} = \{x \in \mathcal{O} \mid \forall a \in \mathcal{P}\ (a \in A \Rightarrow x\mathcal{R}a)\}$$
$$X^{\Delta} = \{a \in \mathcal{P} \mid \forall x \in \mathcal{O}\ (x \in X \Rightarrow x\mathcal{R}a)\}$$

Ainsi, A^{Δ} permet d'exprimer l'ensemble des objets satisfaisant toutes les attributs de A. Dualement, X^{Δ} correspond à l'ensemble des attributs possédés par tous les objets de X.

Exemple 1. Considérons le contexte formel donné dans le Tableau 1 où $\mathcal{O} = \{John, Maria, Peter, Clara\}$ et $\mathcal{P} = \{Man, Woman, Father, Mother, Parent\}$. La présence du symbole " $\times$ " signifie que l'objet en question vérifie l'attribut correspondant. Tandis que l'absence de ce symbole signifie implicitement le contraire.

Tableau 1 – Contexte formel $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$.

$\mathcal{R}$	John	Maria	Peter	Clara
Man	$\times$		$\times$	
$Woman$		$\times$		$\times$
$Father$			$\times$	
$Mother$				$\times$
$Parent$			$\times$	$\times$

Un concept formel de $\mathcal{K}$ est une paire de fermés (au sens topologique) $\langle X, A\rangle$ avec $X \subseteq \mathcal{O}, A \subseteq \mathcal{P}$, tel que $X^{\Delta} = A$ et $A^{\Delta} = X$. L'ensemble X (resp. A) est appelé *extension* (resp. *intension*) du concept formel. A titre d'exemple, $\langle\{Clara\}, \{Woman, Parent, Mother\}\rangle$ est un concept formel de $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$. L'ensemble de tous les concepts formels (désigné par $\mathcal{B}(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$) doté d'un ordre partiel $\preceq$ défini comme : $(X_1, A_1) \preceq (X_2, A_2)$ si $X_1 \subseteq X_2$ (ou de manière équivalente, $A_2 \subseteq A_1$) forme un treillis complet (désigné par $\mathfrak{L}(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$).

Les treillis de concepts formels permettent de caractériser des implications d'attributs qui sont des expressions de la forme $A \to B$ où A et B sont des sous-ensembles d'attributs ($A, B \in 2^{\mathcal{P}}$) [10]. Une telle implication est vérifiée si et seulement si $A^{\Delta} \subseteq B^{\Delta}$ (i.e. $B \subseteq A^{\Delta\Delta}$). La sémantique associée exprime que : pour chaque objet $x \in \mathcal{O}$, si chaque attribut de A est satisfait par l'objet x, alors chaque attribut de B est aussi satisfait par x. Il est ainsi important de remarquer que la sémantique sous-jacente est de type conjonctive. Aussi, l'objectif de ce travail est d'étendre le champ des connaissances induites par des implications d'attributs ayant une sémantique disjonctive. A cette fin, nous proposons de considérer les opérateurs de possibilité proposés dans [6] [8]. Ces opérateurs sont présentés dans la sous-section suivante.

2.2 Lecture possibiliste de l'AFC

Au delà de l'opérateur de suffisance $(.)^{\triangle}$ qui est à la base de l'AFC, d'autres opérateurs ensemblistes de dérivation ont été mis en évidence, dans un cadre possibiliste [6][8]. A savoir, l'opérateur de possibilité (noté $(.)^{\Pi}$), l'opérateur de nécessité (noté $(.)^{\mathrm{N}}$), ainsi que l'opérateur (noté $(.)^{\nabla}$) dual de l'opérateur de suffisance $(.)^{\triangle}$. Les opérateurs $(.)^{\Pi}$ et $(.)^{\mathrm{N}}$ sont définis sur les ensembles de parties $2^{\mathcal{O}}$ et $2^{\mathcal{P}}$ comme suit :

— X^{Π} est l'ensemble des attributs satisfaits par au moins un objet dans X :

$X^{\Pi} = \{a \in \mathcal{P} \mid \exists x \in \mathcal{O},\, x\mathcal{R}a\}$

— X^{N} est l'ensemble des attributs que seuls les objets de X vérifient :

$$X^{\mathrm{N}} = \{a \in \mathcal{P} \mid \forall x \in \mathcal{O}\,(x\mathcal{R}a \Rightarrow x \in X)\}$$

Les opérateurs A^{Π}, A^{N} sont obtenus de manière duale.

Considérons maintenant que la notation $x\overline{\mathcal{R}}a$ signifie que l'objet x ne vérifie pas l'attribut a. Considérons aussi que la notation $(.)^{\Pi}_{\overline{\mathcal{R}}}$, $(.)^{\mathrm{N}}_{\overline{\mathcal{R}}}$, $(.)^{\Delta}_{\overline{\mathcal{R}}}$ indique que les opérateurs de dérivation respectifs $(.)^{\Pi}$, $(.)^{\mathrm{N}}$, $(.)^{\Delta}$ s'appliquent au complémentaire du contexte formel $\mathcal{K}(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$, à savoir le contexte formel $\mathcal{K}(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \overline{\mathcal{R}})$. Etant donné l'ensemble $X \subseteq \mathcal{O}$ et $\overline{X}$ son complémentaire (i.e. $\mathcal{O} \setminus X$), nous rappelons ci-après quelques résultats utilisés dans la suite de ce papier :

$$\begin{array}{lll}
P_1 & : & X^{\Delta}_{\overline{\mathcal{R}}} = \overline{(X^{\Pi})} \\
P_2 & : & X^{\Delta}_{\overline{\mathcal{R}}} = (\overline{X})^{\mathrm{N}} \\
P_3 & : & X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow (X_1)^{\Pi} \subseteq (X_2)^{\Pi} \\
P_4 & : & X \subseteq ((X)^{\Pi})^{\mathrm{N}} \\
P_5 & : & (X_1)^{\Pi} \cup (X_2)^{\Pi} = (X_1 \cup X_2)^{\Pi} \\
P_6 & : & X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow (X_1)^{\mathrm{N}} \subseteq (X_2)^{\mathrm{N}} \\
P_7 & : & (X)^{\Pi} = (((X)^{\Pi})^{\mathrm{N}})^{\Pi}
\end{array}$$

Ces propriétés sont dualement vérifiées pour $A \subseteq \mathcal{P}$. Nous donnons ci-après les définitions d'opérateur de fermeture et d'ouverture qui seront utilisés dans la suite de ce papier.

Definition 1. Un opérateur de fermeture défini sur un ensemble $\mathcal{U}$ est une fonction $\Psi : 2^{\mathcal{U}} \longrightarrow 2^{\mathcal{U}}$ satisfaisant $\forall\, U, V \in 2^{\mathcal{U}}$:
- $U \subseteq \Psi(U)$
- $U \subseteq V \Longrightarrow \Psi(U) \subseteq \Psi(V)$
- $\Psi(\Psi(U)) = \Psi(U)$

Definition 2. Un opérateur d'ouverture défini sur un ensemble $\mathcal{U}$ est une fonction $\Phi : 2^{\mathcal{U}} \longrightarrow 2^{\mathcal{U}}$ satisfaisant $\forall\, U, V \in 2^{\mathcal{U}}$:
- $\Phi(U) \subseteq U$
- $U \subseteq V \Longrightarrow \Phi(U) \subseteq \Phi(V)$
- $\Phi(\Phi(U)) = \Phi(U)$

Désignons par "NΠ-paire", une paire formelle $\langle X, A\rangle$ tel que $X = A^{\Pi}$ et $A = X^{\mathrm{N}}$, où X (resp. A) sera appelé NΠ-extension (resp. NΠ-intension). Il peut être remarqué que les deux éléments X et A possèdent des propriétés topologiques duales. En effet, l'ensemble X est un ouvert tandis que A est un fermé donnant ainsi naissance à une paire "ouvert-fermé". L'ensemble de toutes les NΠ-paires est désigné par $\mathfrak{B}_{\mathrm{N}\Pi}$, tandis que l'ensemble $\mathfrak{B}_{\mathrm{N}\Pi}(Ext)$ (resp. $\mathfrak{B}_{\mathrm{N}\Pi}(Int)$) correspond à l'ensemble de toutes les NΠ-extensions (resp. NΠ-intensions). La Proposition 1 donne en premier lieu une caractérisation des NΠ-paires tandis la Proposition 2 établit la structure algébrique de l'ensemble $\mathfrak{B}_{\mathrm{N}\Pi}$.

Proposition 1. Soient $X \in 2^{\mathcal{O}}$ et $A \in 2^{\mathcal{P}}$, $\langle X, A\rangle$ est une NΠ-paire si et seulement si $\langle \overline{X}, A\rangle$ est un concept formel dans $\overline{\mathcal{R}}$.

Preuve La preuve est obtenue en utilisant les propriétés P_1 and P_2 données ci-dessus. □

Il a déjà été établi que l'ensemble $\mathfrak{B}_{\mathrm{N}\Pi}$ doté d'un ordre partiel ($\preceq$) défini comme : $(X_1, A_1) \preceq (X_2, A_2)$ si $X_1 \subseteq X_2$ (ou de manière équivalente $A_1 \subseteq A_2$) forme un treillis complet, appelé NΠ-treillis et désigné par $\mathfrak{L}_{\mathrm{N}\Pi}$. La proposition suivante donne l'infimum (plus grande borne inférieure) et le supremum (plus petite borne supérieure) pour un sous-ensemble donné de $\mathfrak{L}_{\mathrm{N}\Pi}$.

Proposition 2. L'infimum et le supremum d'un sous-ensemble (X_j, A_j) (j un indice) de $\mathfrak{L}_{\mathrm{N\Pi}}$ sont donnés par :

$$\bigwedge_{j\in J}(X_j, A_j) = (\bigcup_{j\in J} X_j, ((\bigcup_{j\in J} A_j)^{\Pi})^{\mathrm{N}})$$

$$\bigvee_{j\in J}(X_j, A_j) = (\bigcap_{j\in J} X_j, \bigcap_{j\in J} A_j)$$

Preuve Ce résultat peut être prouvé en utilisant la Proposition 1, en plus du fait que $\langle \overline{X}, A\rangle$ soit un concept formel de $\mathcal{K}(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \overline{\mathcal{R}})$, alors :

$$\bigwedge_{j\in J}(\overline{X}_j, A_j)=(\bigcap_{j\in J}\overline{X}_j, (\bigcup_{j\in J} A_j)^{\Delta\Delta}_{\overline{\mathcal{K}}})$$
$$\Leftrightarrow \bigwedge_{j\in J}(\overline{X}_j, A_j)=(\overline{X}_1\cap ...\cap \overline{X}_j, (\overline{(\bigcup_{j\in J} A_j)^{\Pi}})^{\Delta}_{\overline{\mathcal{K}}})$$
$$\Leftrightarrow \bigwedge_{j\in J}(\overline{\overline{X}}_j, A_j)=(\overline{\overline{X}_1\cap ...\cap \overline{X}_j}, (\overline{\overline{(\bigcup_{j\in J} A_j)^{\Pi}}})^{\mathrm{N}})$$
$$\Leftrightarrow \bigwedge_{j\in J}(X_j, A_j)=(\overline{\overline{X_1}}\cup ...\cup \overline{\overline{X_j}}, ((\bigcup_{j\in J} A_j)^{\Pi})^{\mathrm{N}})$$
$$\Leftrightarrow \bigwedge_{j\in J}(X_j, A_j)=(X_1\cup ...\cup X_j, ((\bigcup_{j\in J} A_j)^{\Pi})^{\mathrm{N}})$$
$$\Leftrightarrow \bigwedge_{j\in J}(X_j, A_j)=(\bigcup_{j\in J} X_j, ((\bigcup_{j\in J} A_j)^{\Pi})^{\mathrm{N}})$$

La preuve du supremum est obtenue de manière similaire. $\square$

Exemple 2. La Figure 1 illustre le treillis $\mathfrak{L}_{\mathrm{N\Pi}}$ correspondant au contexte formel donné dans le Tableau 1.

Considérons maintenant l'opérateur μ, qui associe à chaque ensemble d'attributs $A \in 2^{\mathcal{P}}$, sa $\mathrm{N\Pi}$-paire, et qui est défini comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \mu: & 2^{\mathcal{P}} & \mapsto & \mathcal{B}_{\mathrm{N\Pi}} \\ & \mathrm{A} & \rightarrow & \mu(A) = \langle A^{\Pi}, (A^{\Pi})^{\mathrm{N}}\rangle \end{array}$$

La proposition suivante détermine algébriquement le résultat de l'application de l'opérateur μ pour un ensemble A d'attributs.

Proposition 3. Soit un ensemble d'attributs $A \in 2^{\mathcal{P}}$, alors $\mu(A) = \bigwedge_{a\in A} \mu(\{a\})$

Preuve Le résultat $A^{\Pi} = \bigcup_{a\in A} a^{\Pi}$ est aisément obtenu de par la définition de l'opérateur de possibilité. D'autre part, nous avons $\mu(A) = (A^{\Pi}, (A^{\Pi})^{\mathrm{N}}) \Leftrightarrow \mu(A) = (\bigcup_{a\in A} a^{\Pi}, (\bigcup_{a\in A} a^{\Pi})^{\mathrm{N}}) = \bigwedge_{a\in A} \mu(\{a\})$ $\square$

3 Implications d'attributs disjonctives

Nous proposons maintenant d'introduire les implications d'attributs disjonctives de la forme $a_1 \vee ... \vee a_n \longmapsto b_1 \vee ... \vee b_m$ (désignées par $\bigvee A \longmapsto \bigvee B$ avec $A = \{a_1, ..., a_n\}$, et $B = \{b_1, ..., b_m\}$). La satisfaction d'une telle implication est liée à l'ensemble de tous les objets de $\mathcal{O}$. Nous prouvons qu'une implication d'attributs disjonctive $\bigvee A \longmapsto \bigvee B$ est valide dans un contexte formel si et seulement si chaque objet qui n'est jamais satisfait par aucun attribut de B n'est également jamais satisfait par aucun attribut de A. Formellement,

$$\mathcal{K} \models \bigvee A \longmapsto \bigvee B,$$

si et seulement si $\forall x \in \mathcal{O}, si\, b_1 \nsubseteq \{x\}^{\Pi} \wedge ... \wedge b_m \nsubseteq \{x\}^{\Pi}\ alors\ a_1 \nsubseteq \{x\}^{\Pi} \wedge ... \wedge a_n \nsubseteq \{x\}^{\Pi}$

Par exemple, le contexte formel $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ donné dans le Tableau 1 satisfait l'implication d'attributs disjonctive Parent $\longmapsto$ Father $\vee$ Mother (i.e., on a $\mathcal{K}_{\mathcal{S}} \models$ Parent $\longmapsto$ Father $\vee$ Mother).

Dans ce qui suit nous donnons un résultat important car permettant de caractériser de pareilles implications pour la suite de ce papier.

Proposition 4. Une implication d'attributs disjonctive $\bigvee A \longmapsto \bigvee B$ est valide dans le contexte formel $\mathcal{K}(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ si et seulement si l'implication d'attributs $B \longmapsto A$ est valide dans le contexte formel $\overline{\mathcal{K}}(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \overline{\mathcal{R}})$ si et seulement si $A \subseteq ((B)^{\Pi}_{\mathcal{R}})^{\mathrm{N}}_{\mathcal{R}}$.

Preuve. Supposons que $B \longmapsto A$ soit valide dans $\overline{\mathcal{K}}$. Exprimé en logique formelle, cela signifie $\wedge_{b\in B}\neg b \rightarrow \wedge_{a\in A}\neg a$, qui est logiquement équivalent à $\vee_{a\in A} a \rightarrow \vee_{b\in B} b$. A partir de là, dire que $B \longmapsto A$ est valide dans $\overline{\mathcal{K}}$, signifie que $A \subseteq B^{\Delta\Delta}_{\overline{\mathcal{R}}}$. Conséquemment, $A \subseteq (\overline{B^{\Pi}_{\mathcal{R}}})^{\Delta}_{\overline{\mathcal{R}}}$ si et seulement si $A \subseteq ((B)^{\Pi}_{\mathcal{R}})^{\mathrm{N}}_{\mathcal{R}}$. $\square$

Une façon plus simple d'affirmer la satisfaction d'une implication d'attributs disjonctive sur la base de l'opérateur de possibilité $(.)^{\Pi}$ est donnée ci-après.

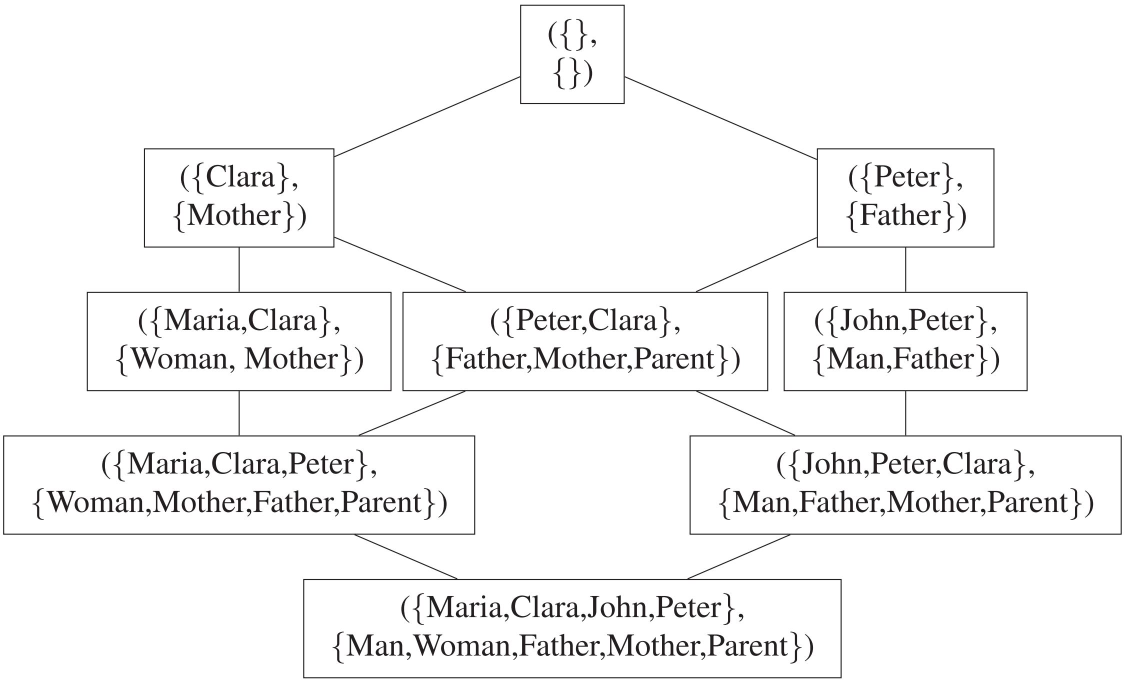

Figure 1 – Treillis $\mathfrak{L}_{\mathrm{N\Pi}}$

Proposition 5. Soit $\mathcal{K}(\mathcal{O},\mathcal{P},\mathcal{R})$ un contexte formel et $A, B \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{K} \models \bigvee A \longmapsto \bigvee B$ si et seulement si pour chaque $x \in \mathcal{O}$, $B \not\subseteq \overline{\{x\}^{\Pi}}$ ou $A \subseteq \overline{\{x\}^{\Pi}}$.

Une implication d'attributs disjonctive valide dans un contexte $\mathcal{K}(\mathcal{O},\mathcal{P},\mathcal{R})$ peut être obtenue à partir du treillis des "NΠ-paires" $\mathfrak{L}_{\mathrm{N\Pi}}$. La proposition suivante illustre cela.

Proposition 6. Soit $\mathcal{K}(\mathcal{O},\mathcal{P},\mathcal{R})$ un contexte formel, $a \in \mathcal{P}$ et $B \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{K} \models a \longmapsto \bigvee B$ si et seulement si $(a^{\Pi},(a^{\Pi})^{\mathrm{N}}) \leq (B^{\Pi},(B^{\Pi})^{\mathrm{N}})$ (i.e. $\mu(a) \leq \bigwedge_{b\in B} \mu(b)$)

Cela signifie que nous devons vérifier dans le treillis $\mathfrak{L}_{\mathrm{N\Pi}}$ si les NΠ-paires associées à A sont situées au-dessus de l'infimum de toute NΠ-paire associée à b de B.

4 Implications possibles et certaines dans un contexte incomplet

Le cas de l'ignorance totale n'a été considéré que par Obiedkov [13] et Burmeister et Holzer [2] jusqu'à présent. Ils ont proposé d'introduire une troisième valeur, notée " ?", dans un contexte formel, ce qui conduit à la notion de contexte incomplet, parfois aussi appelé contexte à trois valeurs. Un contexte incomplet est formellement représenté par $\mathcal{K}_i(\mathcal{O},\mathcal{P},\{+,-,?\},\mathcal{R}_i)$ où $\mathcal{O}$ est un ensemble d'objets, $\mathcal{P}$ un ensemble d'attributs, "$+$", "$-$", "?" sont les trois entrées possibles du contexte incomplet, et $\mathcal{R}_i$ est une relation ternaire $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{P} \times \{+,-,?\}$. L'interprétation de la relation $\mathcal{R}_i$ est comme suit. Soit $x \in \mathcal{O}$ et $a \in \mathcal{P}$:

— $(x,a,+) \in \mathcal{R}_i$: il est connu que l'objet x vérifie l'attribut a ;
— $(x,a,-) \in \mathcal{R}_i$: il est connu que l'objet x ne vérifie pas l'attribut a ;
— $(x,a,?) \in \mathcal{R}_i$: on ne sait pas, si l'objet x vérifie ou ne vérifie pas l'attribut a.

Un contexte formel incomplet peut être considéré comme la famille de tous les contextes formels standards obtenus en remplaçant les entrées inconnues $(x,a,?)$ par celles connues ($(x,a,+)$ ou $(x,a,-)$). Considérant les deux cas extrêmes où toutes les entrées inconnues $(x,a,?)$ sont remplacées par $(x,a,-)$, et le cas où toutes ces entrées inconnues $(x, a, ?)$ sont remplacées par $(x, a, +)$, cela donne naissance aux complétions inférieure et supérieure respectivement [9][4].

De cette manière, deux contextes formels classiques (booléen), notés $\mathcal{K}_*(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R}_*)$ et $\mathcal{K}^*(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R}^*)$ peuvent être obtenus respectivement suite aux deux remplacements. De manière plus formelle :

— $\mathcal{K}_*(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R}_*)$ est un contexte formel booléen tel que $\mathcal{R}_* = \{(x, a) | (x, a, +) \in \mathcal{R}_i\}$, où $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_*} = \{x | A \subseteq x\mathcal{R}_*\}$ est l'ensemble des objets vérifiant certainement tous les attributs de A.

— $\mathcal{K}^*(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R}^*)$ est un contexte formel booléen tel que $\mathcal{R}^* = \{(x, a) | (x, a, +) \in \mathcal{R}_i$ ou $(x, a, ?) \in \mathcal{R}_i\}$, où $A^{\Delta}_{\mathcal{K}^*} = \{x | A \subseteq x\mathcal{R}^*\}$ est l'ensemble des objets qui vérifient peut-être tous les attributs de A.

Il existe d'autres contextes formels intermédiaires en remplaçant chaque " ?" par " + " ou " $-$ " et on obtient exactement 2^n contextes formels possibles (n est le nombre de " ?" dans le contexte formel initial). Toutes les implications d'attributs qui sont obtenues à partir de ces contextes formels sont soit des implications d'attributs possibles ou des implications d'attributs certaines. Une implication est certaine si et seulement si elle est valable dans chaque contexte formel $\mathcal{K}_j$, le problème est que cette condition est difficile à vérifier. Ce problème peut être résolu par le théorème suivant.

Théorème 1. Une implication d'attributs $A \longmapsto B$ est certaine dans $\mathcal{K}_i$ si et seulement si $A^{\Delta}_{\mathcal{K}^*} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}_*}$

Preuve.
a) Condition nécessaire
Supposons que $A \longmapsto B$ est une implication d'attributs certaine dans $\mathcal{K}_i$ et $A^{\Delta}_{\mathcal{K}^*} \nsubseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}_*}$.
$A^{\Delta}_{\mathcal{K}^*} \nsubseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}_*} \Longrightarrow \exists x \in \mathcal{O} \mid x \in A^{\Delta}_{\mathcal{K}^*}$ et $x \notin B^{\Delta}_{\mathcal{K}_*}$
$\Longrightarrow \exists$ un contexte formel $\mathcal{K}_j(\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R}_j)$ tel que $\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_* \cup Q$ où $Q = \{(x, a) \in \mathcal{R}^* \mid a \in A \wedge (x, a, ?) \in \mathcal{R}\}$
ainsi, $x \in A^{\Delta}_{\mathcal{K}_j}$ et $x \notin B^{\Delta}_{\mathcal{K}_j} \Longrightarrow A^{\Delta}_{\mathcal{K}_j} \nsubseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}_j} \Longrightarrow A \longmapsto B$ est non valide dans $\mathcal{K}_j \Longrightarrow A \longmapsto B$ n'est pas une implication d'attributs certaine (contradiction avec l'hypothèse de départ).

b) Condition suffisante
Etant donné un contexte formel $\mathcal{K}_j$, nous avons les deux inclusions suivantes vérifiées $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_j} \subseteq A^{\Delta}_{\mathcal{K}^*}$ et $B^{\Delta}_{\mathcal{K}_*} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}_j}$. Comme nous avons $A^{\Delta}_{\mathcal{K}^*} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}_*}$, en conclusion $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_j} \subseteq A^{\Delta}_{\mathcal{K}^*} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}_*} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}_j}$. Donc $A \longmapsto B$ est une implication d'attributs certaine. $\square$

De la même manière, il convient de remarquer qu'une implication d'attributs possible, est une implication d'attributs qui est valide dans au moins un contexte formel $\mathcal{K}_j$. Le théorème suivant permet de faciliter cet aspect.

Théorème 2. Une implication d'attributs $A \longmapsto B$ est possible dans $\mathcal{K}_i$ si et seulement si $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_*} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}^*}$

Preuve.
a) Condition nécessaire
$A \longmapsto B$ est une implication d'attributs possible dans $\mathcal{K}_i \Longleftrightarrow \exists$ un contexte formel $\mathcal{K}_j$ tel que $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_j} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}^j}$ (a)
il est clair que $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_*} \subseteq A^{\Delta}_{\mathcal{K}_j}$ et $B^{\Delta}_{\mathcal{K}_j} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}^*}$ (b)
de (a) et (b) $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_*} \subseteq A^{\Delta}_{\mathcal{K}_j} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}_j} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}^*}$, enfin $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_*} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}^*}$.

b) Condition suffisante
Supposons que $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_*} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}^*}$. Deux cas peuvent etre distingués
$B \subseteq A$: alors $A \longmapsto B$ est une implication valide dans tout les contextes ;
$B \cap A \neq \emptyset$ et $B \nsubseteq A$: alors $A \longmapsto B$ est valide si est seulement si $A \longmapsto B \setminus A$ est une implication d'attributs valide dans le même contexte formel.
Il nous reste le cas où A et B sont disjoints. considérant le contexte $\mathcal{K}_{AB}$ comme suit : tout (?) de la colonne A est remplacé par (0), et tout (?) de la colonne B est remplacé par (1). Il résulte que $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_*} = A^{\Delta}_{\mathcal{K}_{AB}}$ et $B^{\Delta}_{\mathcal{K}^*} = B^{\Delta}_{\mathcal{K}_{AB}}$. d'où $A^{\Delta}_{\mathcal{K}_{AB}} \subseteq B^{\Delta}_{\mathcal{K}_{AB}}$, donc $A \longmapsto B$ est valide dans $\mathcal{K}_{AB}$, en conclusion $A \longmapsto B$ est une im-

plication possible dans $\mathcal{K}_j$. $\square$

Cette section considère également les implications d'attributs disjonctives présentées dans la Section 3 qui sont valides dans un contexte formel incomplet $\mathcal{K}_i$. Comme dans le cas des implications d'attributs conjonctives, nous distinguons les implications d'attributs disjonctives certaines et les implications d'attributs disjonctives possibles.

Notez que $(A)^{\Pi}_{\mathcal{K}_*}$ est l'ensemble d'objets ayant certainement au moins un attribut de A, et $(A)^{\Pi}_{\mathcal{K}^*}$ est l'ensemble d'objets qui ont peut-être au moins un attribut de A. Nous présentons ainsi deux résultats majeurs dans ce papier.

Théorème 3. Une implication d'attributs disjonctive $\bigvee A \longmapsto \bigvee B$ est certaine si et seulement si $A^{\Pi}_{\mathcal{K}^*} \subseteq B^{\Pi}_{\mathcal{K}_*}$

Théorème 4. Une implication d'attributs disjonctive $\bigvee A \longmapsto \bigvee B$ est possible si et seulement si $A^{\Pi}_{\mathcal{K}_*} \subseteq B^{\Pi}_{\mathcal{K}^*}$

5 Implications d'attributs induites à partir de contextes incertains

Dans un contexte formel incertain les cases sont remplies par des paires (α, β) de degré de nécessité. Cela veut dire que (α) désigne la nécessité que l'objet vérifie l'attribut, et (β) désigne la nécessité que l'objet ne vérifie pas l'attribut. Nous avons donc $\min(\alpha, \beta) = 0$ [7]. Les paires (1,0) et (0,1) correspondent aux situations complètement informées où on sait avec certitude que l'objet vérifie l'attribut (i.e. +), ou ne vérifie pas l'attribut (i.e. -), respectivement. La paire (0,0) reflète l'ignorance totale (i.e. ?), tandis que les paires (α, β) s.t. $1 > \max(\alpha, \beta) > 0$ correspondent aux situations d'ignorance partielle.

Considérons une paire de seuils (u, v) avec $u > 0$ et $v > 0$. $\mathcal{K}_{(u,v)}$ est un contexte formel obtenu en remplaçant toutes les entrées de la forme :

- $(\alpha, 0)$ tel que $\alpha \geq u$ par (+) ;
- $(\alpha, 0)$ tel que $\alpha < u$ par (?) ;
- $(0, \beta)$ tel que $\beta \geq v$ par (-) ;
- $(0, \beta)$ tel que $\beta < v$ par (?).

Le contexte formel classique $(\mathcal{K}_{(u,v)})_*$ est obtenu en remplaçant par des (+) les paires $(\alpha, 0)$ tel que $\alpha \geq u$ et tout le reste par des (-). Le contexte formel classique $(\mathcal{K}_{(u,v)})^*$ est obtenu en remplaçant par des (-) les paires $(0, \beta)$ tel que $\beta \geq v$ et tout le reste par des (+).

Observons alors que $(\mathcal{K}_{(u,v)})_*$ ne dépend pas de v, et augmente quand u diminue. $(\mathcal{K}_{(u,v)})^*$ ne dépend pas de u, et augmente quand v augmente. Rappelons-nous que $A^{\Delta}_{\mathcal{K}}$ augmente si $\mathcal{K}$ augmente (au sens de l'inclusion). Donc, $A^{\Delta}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})^*}$ augmente quand v augmente. $B^{\Delta}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})_*}$ diminue quand u augmente.

Une implication d'attributs $A \longmapsto B$ est donc d'autant plus certaine qu'il existe un u grand et un v grand tel que $A^{\Delta}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})^*} \subseteq B^{\Delta}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})_*}$. Donc le degré de certitude cert($A \longmapsto B$) de l'implication d'attributs $A \longmapsto B$ est égal à la valeur maximale w tel que $A^{\Delta}_{(\mathcal{K}_{(w,w)})^*} \subseteq B^{\Delta}_{(\mathcal{K}_{(w,w)})_*}$. En particulier, cert($A \longmapsto B$) = 1 iff $A^{\Delta}_{(\mathcal{K}_{(1,1)})^*} \subseteq B^{\Delta}_{(\mathcal{K}_{(1,1)})_*}$, c'est-à-dire que les implications d'attributs certaine sont calculées avec la partie la plus certaines des données. De même un degré de possibilité est attaché aux implications d'attributs telles que $A^{\Delta}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})_*} \subseteq B^{\Delta}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})^*}$ qui est d'autant plus grand que u et v sont grands.

Nous considérons également les implications d'attributs disjonctives dans un contexte formel incertain. Il peut être constaté que $\overline{(\mathcal{K}_{(u,v)})_*}$ ne dépend pas de v, et augmente quand u augmente, et $\overline{(\mathcal{K}_{(u,v)})^*}$ ne dépend pas de u, et augmente quand v diminue. Rappelons que l'implication d'attributs disjonctive $\bigvee A \longmapsto \bigvee B$ est valide dans un contexte formel $\mathcal{K}$ si et seulement si l'implication d'attributs $B \longmapsto A$ est valide dans $\overline{\mathcal{K}}$. Par conséquent, le degré de certitude cert($B \longmapsto A$) est égal à la valeur maximale w tel que $B^{\Delta}_{(\overline{\mathcal{K}}_{(u,v)})_*} \subseteq A^{\Delta}_{(\overline{\mathcal{K}}_{(u,v)})^*}$, équivalent à $\overline{B^{\Pi}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})_*}} \subseteq \overline{A^{\Pi}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})^*}}$, ce qui est s'écrit de façon équivalente : $A^{\Pi}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})^*} \subseteq$

$B^{\Pi}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})_*}$. De même un degré de possibilité est attaché à une implication d'attributs de telle sorte que $A^{\Pi}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})^*} \subseteq B^{\Pi}_{(\mathcal{K}_{(u,v)})_*}$, qui est d'autant plus grand que u et v sont grands.

6 Conclusion

Tous les travaux existants et les approches relatives à l'AFC reposent sur l'utilisation de l'opérateur de dérivation de Galois classique (à savoir l'opérateur de suffisance). Dans cet article, nous avons proposé une approche qui étend la capacité de représention de connaissances de l'AFC et cela en considérant les implications d'attributs disjonctives. L'approche ainsi proposée dans ce papier considère des paires "ouvert-fermé" obtenues par une composition asymétrique d'opérateurs de nécessité et de possibilité $(\mathrm{N} \circ \Pi)$. Nous avons seulement mis l'accent sur la composition $(.)^{\mathrm{N}\Pi}$. Des travaux de recherche futurs devraient concerner l'étude d'autres compositions possibles des opérateurs possibilistes tels que $(.)^{\Pi\Delta}$, $(.)^{\nabla\Delta}$, etc.

Références

[1] Ait-Yacoub, Z. Djouadi, Y., Dubois, D., Prade, H. From a possibility theory view of formal concept analysis to the possibilistic handling of incomplete and uncertain contexts. CEUR Proc. 5th Workshop "What can FCA do for Artificial Intelligence ?" (FCA4AI'16), ECAI, The Hague, Aug. 30, 2016.

[2] Burmeister, P., Holzer, R. Treating incomplete knowledge in formal concept analysis. In : *Formal Concept Analysis. Foundations and Applications*, (B. Ganter, G. Stumme, R. Wille, eds.), LNCS 3626, Springer, 114–126, 2005.

[3] Djouadi, Y., Dubois, D., Prade, H. Possibility theory and formal concept analysis : Context decomposition and uncertainty handling. *Proc.13th Int. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty (IPMU'10)*, (E. Hüllermeier, R. Kruse, F. Hoffmann, eds.), Dortmund, LNCS 6178, Springer, 260–269, 2010.

[4] Djouadi, Y., Dubois, D., Prade, H. Graduality, uncertainty and typicality in formal concept analysis. In : *35 Years of Fuzzy Set Theory - Celebratory Volume Dedicated to the Retirement of Etienne E. Kerre*, (C. Cornelis, G. Deschrijver, M. Nachtegael, S. Schockaert, Y. Shi, eds.), Springer, 127–147, 2011.

[5] Djouadi, Y., Prade, H. Possibility-theoretic extension of derivation operators in formal concept analysis over fuzzy lattices. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 10, 287–309, 2011.

[6] Dubois, D., Dupin de Saint-Cyr, F., Prade, H. A possibility-theoretic view of formal concept analysis. *Fundamenta. Informaticae*, 75 : 195–213, 2007.

[7] Dubois, D., Prade, H. *Théorie des Possibilités.* Masson, Paris, (2nde édition), 1987.

[8] Dubois, D., Prade, H. Possibility theory and formal concept analysis in information systems. *Proc. Int. Fuzzy Systems Association World Cong. (IFSA'09)*, Lisbon, Portugal, 1021–1026, 2009.

[9] Dubois, D., Prade, H. Formal concept analysis from the standpoint of possibility theory. *Formal Concept Analysis - 13th Int. Conf., ICFCA*, (J. Baixeries, C. Sacarea, M. Ojeda-Aciego, eds.), Nerja, LNCS 9113, Springer, 21–38, 2015.

[10] Duquenne, V. Contextual implications between attributes and some representation properties for finite lattices. *Beiträge zur Begriffsanalyse*, BI Wissenschaftsverlag, (B. Ganter, R. Wille and K. Wolff, eds.), 213–239, 1987. Reprinted in *Formal Concept Analysis, 11th Int. Conf. ICFCA*, Dresden, (P. Cellier, F. Distel, B. Ganter, eds.), LNCS 7880, Springer, 1–27, 2013.

[11] Ganter, B., Wille, R. *Formal Concept Analysis : Mathematical Foundations*.Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

[12] Guigues, J. L., Duquenne, V. Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 95 : 5-18, 1986.

[13] Obiedkov, S. A. Modal logic for evaluating formulas in incomplete contexts. In Priss, U., Corbett, D. and Angelova, G., eds, Proc. 10th Int. Conf. on Conceptual Structures (ICCSÕ02), Borovets, Bulgaria, July 15-19, vol. 2393 of LNCS, pages 314–325. Springer, 2002.

[14] Wille, R. Restructuring lattice theory : an approach based on hierarchies of concepts. In : *Ordered sets*, (I. Rival, ed.), D. Reidel Publ., 445–470, 1982. Reprinted in *Formal Concept Analysis, 7th Int. Conf. ICFCA*, Darmstadt, (S. Ferré, S. Rudolph, eds.), LNCS 5548, Springer, 314-339, 2009.