



## Open Archive TOULOUSE Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in : <http://oatao.univ-toulouse.fr/>  
Eprints ID : 15568

**To cite this version** : Marquet, Alexandre and Siclet, Cyrille and Roque, Damien  
*Détermination de filtres d'émission/réception minimisant l'interférence auto-induite par les communications multiporteuses FTN.* (2015) . (Unpublished)

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: [staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

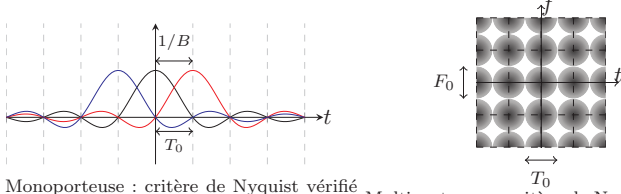
# Détermination de filtres d'émission/réception minimisant l'interférence auto-induite par les communications multiporteuses FTN



Alexandre Marquet, Cyrille Siclet et Damien Roque  
alexandre.marquet@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

## 1. PROBLÈME

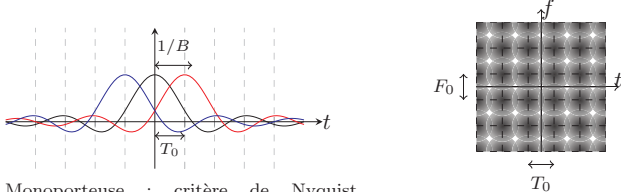
La plupart des systèmes classiques permettent la reconstruction parfaite des symboles en l'absence de canal. Cela nécessite de respecter le critère de Nyquist.



Monoporteuse : critère de Nyquist vérifié ( $\frac{1}{BT_0} \leq 1$ ).

Multiporteuses : critère de Nyquist vérifié ( $\rho = \frac{1}{F_0 T_0} \leq 1$ ).

A contrario, les systèmes travaillant **au delà de la cadence de Nyquist** (ou FTN pour faster-than-Nyquist) visent l'**augmentation de l'efficacité spectrale** en relâchant cette contrainte, induisant ainsi de l'**interférence entre impulsions de mise en forme**.



Monoporteuse : critère de Nyquist non-vérifié ( $\frac{1}{BT_0} > 1$ ).

Multiporteuses : critère de Nyquist non-vérifié ( $\rho = \frac{1}{F_0 T_0} > 1$ ).

## 2. CONTRIBUTION

Détermination de **filtres prototypes maximisant le rapport signal sur interférence plus bruit (RSIB)** d'un système de communication **multiporteuses FTN** sur canal à bruit additif blanc gaussien (BABG).

## 3. RELATION D'ENTRÉE/SORTIE

L'équivalent complexe en bande de base du signal transmis s'exprime sous la forme

$$s(t) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} c_{m,n} g_{m,n}(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

où  $c_{m,n}$  est la séquence de symboles i.i.d émis de variance  $\sigma_c^2$ , et  $\mathbf{g} = \{g_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$  est une famille de gabor de paramètres  $F_0, T_0$  (donc de densité  $\rho = \frac{1}{F_0 T_0}$ ) et de prototype  $g(t)$  :

$$g_{m,n}(t) = g(t - nT_0) e^{j2\pi m F_0 t}. \quad (2)$$

Le signal reçu  $r(t)$  est entaché d'un bruit gaussien complexe circulaire  $b(t)$  de densité spectrale bilatérale  $2N_0$  :

$$r(t) = s(t) + b(t). \quad (3)$$

Dans le cas d'un **récepteur linéaire** utilisant une famille de filtres de réception  $\check{\mathbf{g}} = \{\check{g}_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$ , les symboles estimés s'expriment par

$$\begin{aligned} \check{c}_{p,q} &= \langle \check{g}_{p,q}, r \rangle, \quad \forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \\ &= \underbrace{c_{p,q} \langle \check{g}_{p,q}, g_{p,q} \rangle}_{\check{c}_{p,q} : \text{signal utile}} + \underbrace{\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(p,q)\}} c_{m,n} \langle \check{g}_{p,q}, g_{m,n} \rangle}_{i_{p,q} : \text{interférence}} + \underbrace{\langle \check{g}_{p,q}, b \rangle}_{b_{p,q} : \text{bruit}}. \end{aligned} \quad (4)$$

## 4. EXPRESSION DU RSIB

D'après (4), on peut exprimer le RSIB par

$$\text{RSIB} = \frac{\sigma_{\check{c}_{p,q}}^2}{\sigma_{i_{p,q}}^2 + \sigma_{b_{p,q}}^2} = \frac{1}{\frac{\sigma_{i_{p,q}}^2}{\sigma_{\check{c}_{p,q}}^2} + \frac{\sigma_{b_{p,q}}^2}{\sigma_{\check{c}_{p,q}}^2}} \quad (5)$$

avec  $\sigma_{\check{c}_{p,q}}^2 = |\langle \check{g}_{p,q}, g_{p,q} \rangle|^2 \sigma_c^2$ ,  $\sigma_{i_{p,q}}^2 = \sum_{(m,n) \neq (p,q)} |\langle \check{g}_{p,q}, g_{m,n} \rangle|^2 \sigma_c^2$  et  $\sigma_{b_{p,q}}^2 = 2 \|\check{g}_{p,q}\|^2 N_0$ .

## 5. MAXIMISATION DU RSIB

5.1. Maximisation du RSI =  $\sigma_{\check{c}_{p,q}}^2 / \sigma_{i_{p,q}}^2$

D'après [1],  $|\langle \check{g}_{p,q}, g_{p,q} \rangle|^2$  est minimisé si  $\mathbf{g}$  et  $\check{\mathbf{g}}$  sont des **frames duales canoniques**.  $\check{\mathbf{g}}$  est donc une frame de Gabor. On peut alors écrire

$$\frac{\sigma_{\check{c}_{p,q}}^2}{\sigma_{i_{p,q}}^2} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{|\langle \check{g}, g_{m-p, n-q} \rangle|^2}{|\langle \check{g}, g \rangle|^2} - 1. \quad (6)$$

De plus, en utilisant la définition d'une frame  $\mathbf{g}$  de bornes  $A_g$  et  $B_g$  on obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{A_g \|\check{g}\|^2}{|\langle \check{g}, g \rangle|^2} - 1 \leq \frac{\sigma_{\check{c}_{p,q}}^2}{\sigma_{i_{p,q}}^2} \leq \frac{B_g \|\check{g}\|^2}{|\langle \check{g}, g \rangle|^2} - 1 \quad (7)$$

laquelle devient une égalité si  $\mathbf{g}$  forme une **frame étroite**. Dans ce cas, d'après [2], on a  $A_g = B_g = \rho \|g\|^2$  et, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz couplé à la relation  $\check{g}(t) = g(t)/A_g$ , on a :

$$\frac{\sigma_{\check{c}_{p,q}}^2}{\sigma_{i_{p,q}}^2} = \rho - 1. \quad (8)$$

5.2. Maximisation du RSB =  $\sigma_{\check{c}_{p,q}}^2 / \sigma_{b_{p,q}}^2$

En utilisant la relation de Cauchy-Schwartz, on montre que le fait d'avoir  $\mathbf{g}$  et  $\check{\mathbf{g}}$  duales canoniques étroites suffit à maximiser le RSI :

$$\frac{\sigma_{\check{c}_{p,q}}^2}{\sigma_{b_{p,q}}^2} = \frac{\|\check{g}\|^2}{|\langle \check{g}, g \rangle|^2} \frac{2N_0}{\sigma_c^2} = \frac{1}{\|g\|^2} \frac{2N_0}{\sigma_c^2}. \quad (9)$$

5.3. Expression du RSIB maximisé

En notant  $E_s = \frac{1}{2} \sigma_c^2 \|g\|^2$  l'énergie symbole, on obtient

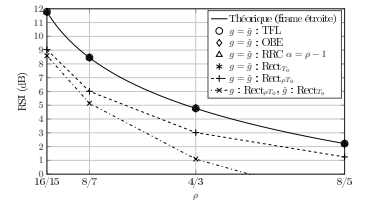
$$\text{RSIB} = \frac{1}{\rho - 1 + \frac{N_0}{E_s}}. \quad (10)$$

## 6. PERFORMANCES

On remarque une dégradation des performances si les frames sont duales canoniques mais non-étroites, dégradation plus importante encore si elles ne sont ni étroites, ni duales canoniques.

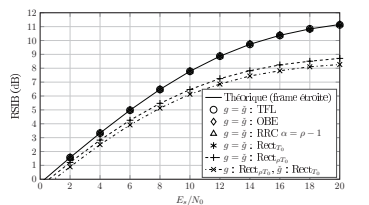
Paramètres :

- $K = 5000$  symboles envoyés ;
- $M = 128$  sous-porteuses ;
- constellation QPSK.



Paramètres :

- $K = 5000$  symboles envoyés ;
- $M = 128$  sous-porteuses ;
- constellation QPSK ;
- densité  $\rho = 16/15$ .



## 7. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans un système multiporteuses FTN, l'utilisation de frames étroites duales canoniques en émission et en réception permet la maximisation du RSIB sur canal BABG.

**Travaux en cours** : turboégalisation de l'interférence résiduelle.

## 8. RÉFÉRENCES

- [1] O. Christensen. *Frames and bases: An introductory course*. Birkhauser, 2008.
- [2] I. Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 36(5):961-1005, Sep 1990.