

Détection robuste de signaux en présence d'incertitudes sur leur fréquence

Martin ZADNIK¹, François VINCENT², Rob VINGERHOEDS³, Frédéric GALTIER³

¹AMPERE

42, avenue du Général de Croutte, 31100 Toulouse, France

²ENSICA

1, place Émile Blouin, 31056 Toulouse, France

³Siemens VDO Automotive

1, avenue Paul Ourliac, 31036 Toulouse, France

mzadnik@ensica.fr/martin.zadnik@siemens.com, vincent@ensica.fr

robertus.vingerhoeds@siemens.com, frederic.galtier@siemens.com

Résumé – Le présent article traite de la détection d'une combinaison linéaire de signaux monofréquentiels noyée dans un bruit large bande, dans le cas où leur fréquence n'est connue qu'approximativement. Nous démontrons que les déviations de fréquence provoquent un élargissement du sous-espace signal. Son expression analytique nous permet de construire une base adaptée de ce sous-espace élargi que nous utilisons pour robustifier le test de détection du rapport de vraisemblance généralisé (GLRT). Les performances de la méthode proposée sont illustrées par des résultats numériques.

Abstract – In this paper we consider the problem of detection of linearly combined single frequency signals in the presence of a broadband noise in the case where the signal frequencies are not perfectly known. We show that frequency deviations produce a spread of the signal subspace. This analytical result is used to construct a matched basis of the extended subspace that we use to robustify the generalised likelihood ratio test (GLRT). The performance of the proposed method is illustrated by numerical results.

1 Introduction

La détection d'un signal dont la signature n'est pas parfaitement connue en présence d'un bruit large bande est un problème d'intérêt que l'on retrouve dans de nombreuses applications. En radar ou sonar, la forme d'onde réfléchie par la cible peut différer de la forme connue de l'onde émise pour de multiples raisons (capteur ou réseau d'antennes mal calibré, défauts de chaîne de réception, diffraction locale, ...) [1, 2, 3]. En télécommunications, la signature du signal à la réception peut avoir subi des modifications dues aux effets de la distortion du canal de propagation [4]. Chaque fois que la signature du signal à détecter est différente de celle présumée, les performances du détecteur adapté peuvent se dégrader de façon importante. Il est alors nécessaire de robustifier la détection pour réduire la sensibilité vis-à-vis des écarts entre les situations nominale et réelle.

Nous nous intéressons ici plus particulièrement à la détection du cliquetis pour moteur automobile. Le signal fourni par le capteur de cliquetis est constitué de quelques résonances spécifiques au moteur que l'on veut détecter pour appliquer ensuite une correction à l'allumage [5]. Les fréquences des résonances peuvent varier légèrement d'un moteur à l'autre ou avec le vieillissement de celui-ci. Ces variations sont difficiles à prévoir mais il est important de les prendre en compte pour ne pas perdre en performance. Cela nous amène donc à un problème de détection d'un

signal avec fréquences biaisées, où les biais sont inconnus.

D'un point de vue théorique, la connaissance imprécise des fréquences du signal cliquetis peut être compensée par une phase d'identification. Il serait en effet possible d'estimer les fréquences en continu et d'appliquer ainsi une méthode de détection adaptative. Or, les contraintes sur la charge calculatoire rendent cette option difficilement exploitable sur les systèmes réels. De plus, lorsque l'on détecte la présence du signal utile sur une grille de fréquences discrètes, on aura une imprécision fréquentielle intrinsèque due à la discrétisation [6]. Le besoin d'un détecteur robuste qui tolère des écarts modérés de fréquence devient nécessaire. En outre, on peut espérer que le nouveau détecteur soit également robuste à d'autres erreurs non modélisées car il fait moins d'hypothèses sur la forme exacte du signal à détecter qu'un détecteur totalement adapté.

L'article se présente comme suit. Dans la section 2 nous introduisons le modèle du signal utilisé ainsi que le critère de performance. Dans la section 3 nous calculons le sous-espace engendré par la méconnaissance des fréquences du signal et le détecteur robuste associé. Nous quantifions ces résultats analytiques dans la section 4 avant de conclure l'article par la section 5.

2 Position du problème

Etant donné un jeu de mesure $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, on considère le problème de la détection du signal utile déterministe partiellement connu $\tilde{\mathbf{s}}$ noyé dans un bruit additif. Le détecteur doit décider entre deux hypothèses :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : \mathbf{x} &= \mathbf{n}, \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{x} &= \tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Le bruit \mathbf{n} est supposé gaussien, de moyenne nulle et de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}$. Le signal utile $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{s}(0), \dots, \tilde{s}(N-1)]^T$ est égal à

$$\tilde{s}(t) = \sum_{p=1}^P a_p \cos(2\pi \tilde{f}_p t - \phi_p). \quad (2)$$

Les amplitudes a_p et les phases ϕ_p sont supposées inconnues. Le nombre de résonances P et la variance du bruit σ^2 sont connus. On suppose connaître de plus les P fréquences de résonance nominales f_p . Les fréquences réelles présentes dans le signal utile \tilde{f}_p sont inconnues mais appartiennent chacune à l'intervalle $[f_p - \Delta/2, f_p + \Delta/2]$, où Δ détermine l'erreur maximale supposée sur les fréquences de résonance.

On utilise dans la suite la notation vectorielle $\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{a}$ avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}_p &= [\tilde{c}_p(0), \dots, \tilde{c}_p(N-1)]^T, \quad \tilde{c}_p(t) = \cos(2\pi \tilde{f}_p t), \\ \tilde{\mathbf{s}}_p &= [\tilde{s}_p(0), \dots, \tilde{s}_p(N-1)]^T, \quad \tilde{s}_p(t) = \sin(2\pi \tilde{f}_p t), \\ \tilde{\mathbf{S}} &= [\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_P, \tilde{\mathbf{s}}_P] \end{aligned} \quad (3)$$

et

$$\begin{aligned} A_p &= a_p \cos(\phi_p), \quad B_p = a_p \sin(\phi_p), \\ \mathbf{a} &= [A_1, B_1, \dots, A_P, B_P]^T. \end{aligned} \quad (4)$$

Dans le cas non perturbé ($\tilde{f}_p = f_p$) nous noterons $\mathbf{c}_p, \mathbf{s}_p$ et \mathbf{S} les vecteurs et matrice nominaux. Il sont donc connus, contrairement à (3). Dans ce cas, le signal $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}}|_{\tilde{f}_p=f_p}$ appartient au sous-espace $\langle \mathbf{S} \rangle$ engendré par les colonnes de la matrice \mathbf{S} . Le logarithme du test de détection du rapport de vraisemblance généralisé

$$L(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{x}}{\sigma^2} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{P}_{\mathbf{S}} \mathbf{x}}{\sigma^2} \underset{\mathcal{H}_0}{\underset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \gamma \quad (5)$$

est alors uniformément le plus puissant [7]. Nous avons défini la matrice de projection sur le sous-espace signal $\mathbf{P}_{\mathbf{S}} \triangleq \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T$. Les performances du détecteur sont mesurées par l'intermédiaire des courbes ROC (angl. *receiver operating characteristic*) qui donnent la probabilité de détection P_d sous \mathcal{H}_1 en fonction de la probabilité de fausse alarme P_{fa} sous \mathcal{H}_0 . Dans notre cas, les biais inconnus sur les fréquences vont provoquer une dégradation de P_d pour une P_{fa} donnée. Notre objectif est de construire un détecteur robuste en vue de minimiser cette dégradation.

3 Sous-espace élargi

Lorsque les fréquences du signal utile ne sont pas connues exactement, on note $\delta f_p = \tilde{f}_p - f_p$ l'écart de fréquence. Il serait théoriquement possible de traiter les écarts

δf_p comme des paramètres déterministes inconnus supplémentaires et de construire un nouveau test du rapport de vraisemblance généralisé. Or, nous avons évoqué dans l'introduction quelques limites concernant l'estimation de fréquence. Une autre approche, décrite dans [8], est de supposer la matrice $\tilde{\mathbf{S}}$ aléatoire et de construire un estimateur du vecteur amplitude \mathbf{a} adapté, avec recours à un algorithme numérique. Cependant, nous allons montrer que l'imprécision sur les fréquences produit un élargissement du sous-espace signal $\langle \mathbf{S} \rangle$ que l'on peut prendre en compte pour modifier le test (5). On retrouve une démarche similaire dans [9, 6] où la base du sous-espace élargi est construite soit sur les vecteurs propres principaux de la matrice $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^T]$ soit sur un ensemble de fréquences équidistantes couvrant un intervalle spécifié. Contrairement à cette approche, nous développons une base spécialement adaptée au cas des fréquences biaisées.

Considérons les colonnes de la matrice \mathbf{S} comme fonctions de fréquence : $\mathbf{c}_p = \mathbf{c}_p(f_p)$, $\mathbf{s}_p = \mathbf{s}_p(f_p)$. En supposant que les déviations δf_p soient petites devant f_p , le développement limité à l'ordre R donne

$$\tilde{\mathbf{c}}_p \approx \mathbf{c}_p + \sum_{r=1}^R \frac{1}{r!} \frac{\partial^r \mathbf{c}_p(f)}{\partial f^r} \Big|_{f=f_p} (\delta f_p)^r, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_p \approx \mathbf{s}_p + \sum_{r=1}^R \frac{1}{r!} \frac{\partial^r \mathbf{s}_p(f)}{\partial f^r} \Big|_{f=f_p} (\delta f_p)^r. \quad (7)$$

Si l'on définit le vecteur temps $\mathbf{t} = [0, \dots, N-1]^T$ et ses puissances $\mathbf{t}^r = [0^r, \dots, (N-1)^r]^T$ et on note par « \odot » le produit d'Hadamard, les dérivées peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\partial^r \mathbf{c}_p(f)}{\partial f^r} \Big|_{f=f_p} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r+1}{2}} (2\pi)^r \mathbf{t}^r \odot \mathbf{s}_p & ; r \text{ impair}, \\ (-1)^{\frac{r}{2}} (2\pi)^r \mathbf{t}^r \odot \mathbf{c}_p & ; r \text{ pair}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^r \mathbf{s}_p(f)}{\partial f^r} \Big|_{f=f_p} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r-1}{2}} (2\pi)^r \mathbf{t}^r \odot \mathbf{c}_p & ; r \text{ impair}, \\ (-1)^{\frac{r}{2}} (2\pi)^r \mathbf{t}^r \odot \mathbf{s}_p & ; r \text{ pair}. \end{cases} \quad (9)$$

On constate alors que les colonnes de la matrice $\tilde{\mathbf{S}}$ et donc le signal $\tilde{\mathbf{s}}$ peuvent se décomposer approximativement sur une base élargie [10]

$$\begin{aligned} [\mathbf{c}_1, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{c}_P, \mathbf{s}_P, \mathbf{t} \odot \mathbf{c}_1, \mathbf{t} \odot \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{t} \odot \mathbf{c}_P, \mathbf{t} \odot \mathbf{s}_P, \dots \\ \dots, \mathbf{t}^R \odot \mathbf{c}_1, \mathbf{t}^R \odot \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{t}^R \odot \mathbf{c}_P, \mathbf{t}^R \odot \mathbf{s}_P] \triangleq \mathbf{S}_R. \end{aligned} \quad (10)$$

Cette approximation peut s'écrire simplement de manière équivalente : $\langle \tilde{\mathbf{S}} \rangle \approx \langle \mathbf{S}_R \rangle$. Le nouveau test de vraisemblance généralisé utilise par conséquent le projecteur sur le sous-espace élargi $\mathbf{P}_{\mathbf{S}_R} \triangleq \mathbf{S}_R (\mathbf{S}_R^T \mathbf{S}_R)^{-1} \mathbf{S}_R^T$. Le détecteur (5) devient maintenant

$$L_R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{P}_{\mathbf{S}_R} \mathbf{x}}{\sigma^2} \underset{\mathcal{H}_0}{\underset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \gamma_R. \quad (11)$$

Le numérateur de notre détecteur robuste (11) est un estimateur de l'énergie de $\tilde{\mathbf{s}}$. Il permet ainsi de récupérer la part du signal $\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}$ qui serait perdue par le détecteur classique (5). L'élargissement du sous-espace signal s'accompagne également d'une augmentation de la projection du bruit seul provoquant ainsi une augmentation de la P_{fa} . Le choix de la taille du sous-espace signal a donc une influence directe sur les performances du détecteur robuste. Choisir

un ordre R trop faible met en défaut la robustesse. Choisir un R trop grand détériore également les performances. Nous allons préciser dans la suite le choix de l'ordre R approprié en fonction du rapport signal à bruit et de l'erreur maximale supposée sur les fréquences.

Le test de détection (11) est une forme quadratique issue du vecteur \mathbf{x} de variables aléatoires gaussiennes qui est de moyenne nulle sous \mathcal{H}_0 et de moyenne $\tilde{\mathbf{s}}$ sous \mathcal{H}_1 . La densité de probabilité de $L_R(\mathbf{x})$ est une fonction χ^2 à $2P(R+1)$ degrés de liberté, centrée sous \mathcal{H}_0 et non centrée sous \mathcal{H}_1 [11] :

$$L_R(\mathbf{x}; \mathcal{H}_0) \sim \chi_{2P(R+1)}^2(0), \quad (12)$$

$$L_R(\mathbf{x}; \mathcal{H}_1) \sim \chi_{2P(R+1)}^2(\lambda_R), \quad \lambda_R = \frac{\tilde{\mathbf{s}}^T \mathbf{P}_{\mathbf{S}_R} \tilde{\mathbf{s}}}{\sigma^2}. \quad (13)$$

Les performances de détection sont alors

$$P_{fa}(\gamma_R) = \Pr[L_R(\mathbf{x}; \mathcal{H}_0) > \gamma_R] = Q_{\chi_{2P(R+1)}^2(0)}(\gamma_R), \quad (14)$$

$$P_d(\gamma_R) = \Pr[L_R(\mathbf{x}; \mathcal{H}_1) > \gamma_R] = Q_{\chi_{2P(R+1)}^2(\lambda_R)}(\gamma_R), \quad (15)$$

où $Q_{\mathcal{L}}(\gamma)$ est la fonction de répartition complémentaire associée à la loi \mathcal{L} . Notons que les équations (14,15) décrivent également les performances du détecteur (5) en prenant $R = 0$ et donc $\mathbf{P}_{\mathbf{S}_R} = \mathbf{P}_{\mathbf{S}}$.

4 Applications numériques

Pour illustrer la robustesse de la méthode de détection proposée et choisir une taille du sous-espace élargi (R) adaptée au problème posé, nous présentons dans cette section quelques résultats numériques. Le signal utile de test contient 3 résonances dont les fréquences nominales valent $f_1 = 0.126$, $f_2 = 0.234$, $f_3 = 0.317$. La longueur du signal est de $N = 100$ échantillons. Les amplitudes a_p et les phases ϕ_p qui sont considérées comme inconnues dans le test de détection, ont été générées de manière aléatoire, uniformément réparties entre $[-1, 1]$ et $[0, 2\pi]$ respectivement. Il en est de même pour les déviations de fréquence δ_p , réparties entre $[-\Delta/2, \Delta/2]$. Les courbes affichées dans la suite sont les performances moyennes issues des simulations Monte Carlo.

Nous comparons les différents ordres d'élargissement du sous-espace $\langle \mathbf{S} \rangle$ en faisant varier le paramètre R de 0 à 3. Le seuil γ_R n'apparaît pas de manière explicite comme paramètre du problème mais sert pour spécifier les différents points (P_{fa} , P_d) de la courbe ROC selon les équations (14,15). Les paramètres restants sont la largeur d'intervalles fréquentiels Δ et le rapport signal à bruit (RSB) qui détermine la variance du bruit σ^2 . Pour résumer, nous étudions la probabilité de détection en fonction de quatre paramètres : $P_d = P_d(P_{fa}, R, \text{RSB}, \Delta)$. Le détecteur non robuste (5) est représenté en trait continu gras. Le détecteur clairvoyant ($\Delta = 0$, $R = 0$) est également représenté pour évaluer la perte de performance liée à la méconnaissance des fréquences.

Sur la figure 1, nous avons fixé le RSB et Δ pour tracer les courbes ROC. La valeur $\Delta = 1/N$ a été choisie car elle correspond à la résolution fréquentielle d'une transformée de Fourier rapide (FFT) sur N points. En effet, si les valeurs nominales f_p ne sont pas connues a priori et qu'on

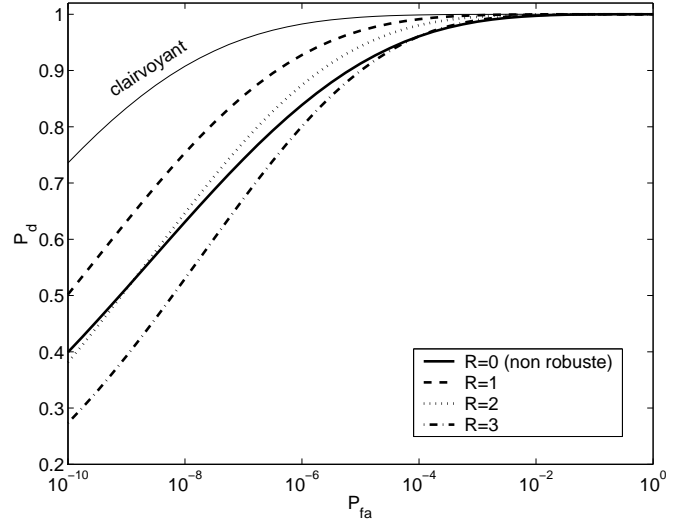


FIG. 1 – Courbes ROC, RSB=-2 dB, $\Delta = 1/N$.

les estime en utilisant la FFT, on aura une incertitude de $\Delta = 1/N$ sur les valeurs estimées. On constate que l'ordre optimal est $R = 1$. Comparant les trois autres ordres R , on s'aperçoit que si un taux de fausse alarme très bas est exigé, il convient de restreindre le sous-espace ($R = 0$) pour limiter la pénétration du bruit dans l'estimateur de l'énergie du signal utile $\mathbf{x}^T \mathbf{P}_{\mathbf{S}_R} \mathbf{x}$. A l'autre extrémité de l'axe P_{fa} , le détecteur utilisant $R = 0$ est en dessous des autres car si plus de fausses alarmes sont tolérées, il est mieux d'élargir le sous-espace pour être sûr d'inclure tout le signal utile. Nous avons également comparé notre détecteur à celui où le sous-espace élargi est calculé à partir des vecteurs propres principaux de la matrice $E[\tilde{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{s}}^T]$. Pour ce dernier, nous avons retenu $2P(R+1)$ vecteurs propres, c'est-à-dire le nombre égal au rang de la matrice \mathbf{S}_R . Les courbes ROC des deux détecteurs sont très proches pour toutes les valeurs de R mais la différence importante en faveur du détecteur présenté est le fait qu'il ne nécessite pas de décomposition propre qui est une opération coûteuse.

La figure 2 est une découpe dans la direction du RSB, où nous avons fixé les valeurs de P_{fa} et de Δ . Elle montre que l'ordre $R = 1$ reste optimal pratiquement pour toutes les valeurs du RSB testées. Le détecteur non robuste est optimal uniquement pour faibles RSB, quand il permet de mieux rejeter le bruit. Dès que le signal utile (s'il est présent) est à quelques dB en dessous du bruit ou plus important, l'élargissement du sous-espace devient bénéfique.

Lorsque l'imprécision fréquentielle Δ augmente bien au delà de $1/N$, le détecteur associé à l'ordre $R = 1$ ne peut plus maintenir les performances optimales. Il faut par conséquent élargir d'avantage le sous-espace signal pour préserver la robustesse. Cette situation peut surgir par exemple quand on n'a pas la possibilité d'estimer les fréquences f_p de chaque mesure \mathbf{x} par la FFT pour garantir une erreur $\Delta = 1/N$. De l'autre côté, si l'imprécision est assez faible (par exemple quand on estime les f_p par *zero padding* dans la FFT), le détecteur non robuste se montre optimal. La figure 3 décrit la performance du détecteur robuste en fonction de l'erreur maximale sur les

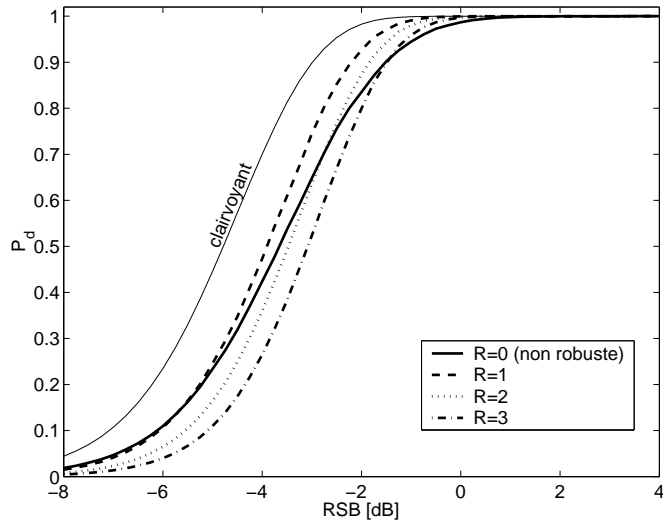


FIG. 2 – Probabilité de détection en fonction du rapport signal à bruit, $P_{fa} = 10^{-6}$, $\Delta = 1/N$.

fréquences pour des valeurs fixes de P_{fa} et du RSB. Le résultat attendu est que plus l'ordre R est élevé, plus importantes peuvent être les déviations δf_p , au détriment de la performance dans le cas non-perturbé.

5 Conclusions

Nous présentons ici une méthode robuste de détection d'une somme de sinusôides dont les fréquences ne sont pas parfaitement connues en présence d'un bruit additif large bande. La méthode repose sur un élargissement du sous-espace signal basé sur un développement de Taylor de la signature fréquentielle autour des fréquences nominales.

Les performances de ce nouveau détecteur robuste, exprimées en terme de probabilité de détection, sont données en fonction de la probabilité de fausse alarme, de l'ordre d'élargissement du sous-espace signal, du rapport signal à bruit et de l'erreur maximale sur les fréquences. Le nombre de paramètres étant important, nous avons analysé l'influence de chacun sur la performance du détecteur grâce à des simulations numériques. Les résultats montrent en particulier que l'erreur intrinsèque sur les fréquences liée à la discrétisation de la FFT peut être minimisée par le choix du détecteur robuste basé sur un élargissement du sous-espace signal de premier ordre.

Références

- [1] H.L. V.TREES : *Optimum Array Processing*. Wiley, New York, 2002.
- [2] O. BESSON, G. VARFOLOMEEV et F. VINCENT : Amplitude estimation of a signal with known waveform in the presence of steering vector uncertainties. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(11), 2005.
- [3] J.J. FUCHS : A robust matched detector. 2006. Soumis à *IEEE Transactions on Signal Processing*.

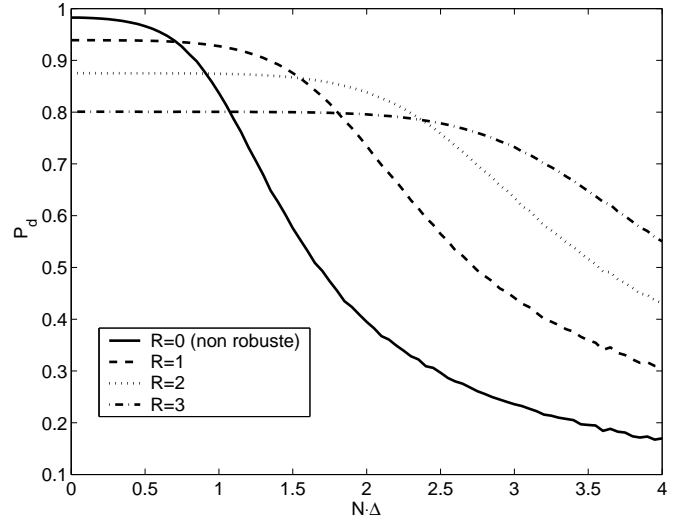


FIG. 3 – Probabilité de détection en fonction de la largeur d'intervalles fréquentiels Δ , $P_{fa} = 10^{-6}$, RSB=-2 dB.

- [4] X. WANG et H.V. POOR : *Wireless Communication Systems : Advanced Techniques for Signal Reception*. Prentice Hall, 2003.
- [5] M. ZADNIK, F. VINCENT, F. GALTIER et R.A. VINGERHOEDS : Performance analysis of knock detectors. Dans *Proceedings of the 18. International Conference on Systems Engineering*, Coventry, septembre 2006.
- [6] A. ZEIRA et B. FRIEDLANDER : Robust adaptive subspace detectors for space time processing. Dans *Proceedings of the IEEE ICASSP*, Seattle, mai 1999.
- [7] L.L. SCHARF et B. FRIEDLANDER : Matched subspace detectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(8), 1994.
- [8] Y.C. ELДАР : Minimax estimation of deterministic parameters in linear models with a random model matrix. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(2), 2006.
- [9] A. ZEIRA et B. FRIEDLANDER : Robust subspace detectors. Dans *Proceedings of the 31. Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers*, Pacific Grove, novembre 1997.
- [10] O. BESSON, L.L. SCHARF et F. VINCENT : Matched direction detectors and estimators for array processing with subspace steering vector uncertainties. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(12), 2005.
- [11] S.M. KAY : *Fundamentals of Statistical Signal Processing*, volume II : Detection Theory. Prentice-Hall, 1993.