



## Open Archive TOULOUSE Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in : <http://oatao.univ-toulouse.fr/>  
Eprints ID : 13009

**To cite this version :**

Quéau, Yvain and Durou, Jean-Denis *Intégration d'un champ de gradient rapide et robuste aux discontinuités - Application à la stéréophotométrie*. (2014) In: Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle - RFIA 2014, 30 June 2014 - 4 July 2014 (Rouen, France). (Unpublished)

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: [staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# Intégration d'un champ de gradient rapide et robuste aux discontinuités - Application à la stéréophotométrie

Yvain Quéau

Jean-Denis Durou

IRIT, UMR CNRS 5505, Toulouse

yvain.queau@enseeiht.fr durou@irit.fr

## Résumé

Nous proposons plusieurs nouvelles méthodes permettant de résoudre le problème de la reconstruction 3D d'une surface à partir de son gradient, qui soient rapides et robustes aux discontinuités de profondeur. Nous proposons de remplacer les moindres carrés par une fonctionnelle inspirée de la méthode de restauration de Perona et Malik, et montrons comment les méthodes d'intégration existantes les plus rapides peuvent être adaptées à la minimisation de cette fonctionnelle.

## Mots-clés

Reconstruction 3D, intégration, champ de normales, champ de gradient, discontinuités, stéréophotométrie.

## Abstract

We propose several new methods for solving the shape-from-gradient problem, which are fast and robust to depth discontinuities. We replace the commonly used least squares by a functional inspired by the method of Perona and Malik, and we show how to adapt the fastest integration methods in order to minimize this functional.

## Keywords

3D-reconstruction, integration, normal field, gradient field, discontinuities, photometric stereo.

## 1 Introduction

### 1.1 Présentation du problème

**Contexte.** La stéréophotométrie [14] est une technique de vision par ordinateur qui permet d'estimer le gradient d'une surface sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Dans la suite, le gradient estimé sera noté

$$G(x, y) = \begin{bmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Sous l'hypothèse d'une caméra orthographique, le problème de la reconstruction 3D à partir d'un champ de gradient consiste à estimer une fonction continûment différentiable  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que pour tout  $(x, y) \in \Omega$ ,

$$\nabla Z(x, y) = G(x, y) \quad (2)$$

Cette formulation s'étend facilement au cas d'une caméra perspective [5]. En pratique, l'équation (2) ne peut pas être résolue directement, car le champ  $G$  n'est jamais rigoureusement intégrable, *i.e.* le terme d'intégrabilité [6]

$$\mathcal{I}(x, y) = \partial_y p(x, y) - \partial_x q(x, y) \quad (3)$$

n'est jamais nul, à cause du bruit et des discontinuités de profondeur qui violent la différentiabilité de  $Z$ , et donc son intégrabilité. La parade la plus naturelle consiste à résoudre l'équation (2) au sens des moindres carrés [10, 6, 12, 5, 8], en minimisant la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_{L_2}(Z) = \iint_{\Omega} \|\nabla Z(x, y) - G(x, y)\|^2 dx dy \quad (4)$$

ou en résolvant l'équation d'Euler-Lagrange associée

$$\Delta Z(x, y) = \nabla \cdot G(x, y) \quad (5)$$

sur l'intérieur  $\overset{\circ}{\Omega}$  de  $\Omega$ , avec une condition bien choisie sur le bord  $\partial\Omega$  (voir ci-après). Dans (5),  $\Delta$  désigne l'opérateur laplacien et  $\nabla \cdot$  l'opérateur divergence. Malheureusement, si une telle formulation est robuste à un bruit additif gaussien, elle n'est pas adaptée aux discontinuités de profondeur, et peut créer des phénomènes de Gibbs au voisinage de ces discontinuités. De tels phénomènes sont gênants pour des applications telles que le rééclairage (cf. figure 1). Dans cet article, nous nous intéressons au problème de l'estimation de  $Z$  en présence de discontinuités de profondeur.

**Résultat principal.** Inspirés par la méthode de Perona et Malik [11], nous proposons de pondérer le problème aux moindres carrés (4) par une fonction  $w$  dépendant du terme d'intégrabilité (3), de façon à limiter la contribution des pixels susceptibles de se trouver sur une discontinuité. Nous considérons donc la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_{PM}(Z) = \iint_{\Omega} w(x, y) \|\nabla Z(x, y) - G(x, y)\|^2 dx dy \quad (6)$$

et présentons plusieurs méthodes d'optimisation qui découlent des algorithmes de résolution de l'équation (5) les plus rapides [6, 12, 1].

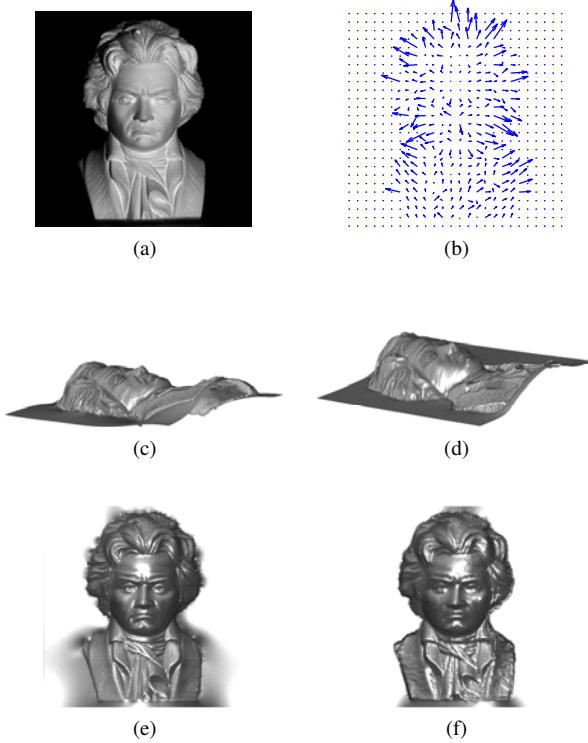


FIGURE 1 – Effet des discontinuités de profondeur sur la reconstruction 3D à partir d'un champ de gradient : (a) des trois images<sup>1</sup> utilisées pour estimer le gradient par stéréophotométrie ; (b) champ de gradient estimé ; (c) reconstruction 3D aux moindres carrés [8] ; (d) reconstruction 3D aux moindres carrés pondérés ; (e) rééclairage de la surface (c) par un éclairage frontal : des phénomènes de Gibbs sont visibles sur le bord du buste ; (f) rééclairage de la surface (d) par le même éclairage : ces phénomènes sont atténués.

## 1.2 Travaux antérieurs

**Problème aux moindres carrés (4).** La résolution de l'équation d'Euler-Lagrange (5), qui est une équation de Poisson, n'est équivalente à la minimisation de la fonctionnelle (4) que si elle est accompagnée de la *condition naturelle au bord*

$$(\nabla Z(x, y) - G(x, y)) \cdot \nu(x, y) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (7)$$

où  $\nu$  est un vecteur normal à  $\partial\Omega$  dans le plan image. Dorénavant, les dépendances en  $(x, y)$  seront omises.

Cette condition de Neumann est remplacée par la condition de Neumann homogène  $\nabla Z = 0$  dans [2], mais il est notable que le problème n'est alors plus équivalent au problème aux moindres carrés original (4). Dorénavant, nous appellerons « condition de Neumann » la condition au bord (7). Cette condition au bord est parfois encore remplacée par une condition de type Dirichlet

$$Z = Z_B \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (8)$$

1. <http://www.ece.ncsu.edu/imaging/Archives/>

où  $Z_B$  est connue. Là encore, le problème n'est plus équivalent à la minimisation de (4), mais il est montré dans [7] qu'une telle condition au bord permet de corriger certains biais dans la donnée  $G$ .

En utilisant la condition au bord (7), l'approximation discrète de l'équation de Poisson (5) peut être résolue numériquement par un schéma itératif. L'algorithme utilisé dans [10, 5] est celui de Jacobi, pour lequel  $N$  itérations sont nécessaires, chacune impliquant  $O(n^4)$  opérations, où  $n$  est la dimension principale de  $\Omega$ . Un tel schéma itératif a été utilisé en raison des contraintes de stockage en mémoire des ordinateurs des années 90, mais dans [1, 2], Agrawal *et al.* montrent que le système linéaire associé peut être résolu directement, en tenant compte du caractère creux de la matrice du système : la complexité est alors celle de la factorisation LU d'une matrice creuse de taille  $n^2 \times n^2$ , à savoir  $O(n^3)$ .

Si  $\Omega$  est rectangulaire, des solutions analytiques fondées sur la transformation de Fourier ont été proposées et adaptées au cas d'une condition au bord périodique [6], ou à celui d'une condition de type Dirichlet ou Neumann [12]. Dans les trois cas, grâce à la transformée de Fourier rapide (FFT), la résolution peut être menée en  $O(n^2)$  opérations. Enfin, Harker et O'Leary montrent dans [8] que (4) peut être minimisée efficacement en cherchant son minimiseur sous forme matricielle : l'équation à résoudre est alors une *équation de Sylvester*, qui peut être résolue en  $O(n^3)$ . La condition naturelle au bord est implicitement satisfaite. Ils montrent également dans [7] comment étendre cette méthode au cas d'une condition au bord de type Dirichlet.

**Régularisation.** Le schéma itératif de Horn et Brooks peut être modifié de façon à inclure une régularisation non quadratique : il est montré dans [2, 4] que la fonctionnelle (4) peut être remplacée par

$$\mathcal{F}_\Phi(Z) = \iint_\Omega \Phi(\|\nabla Z - G\|) \, dx dy \quad (9)$$

où  $\Phi$  est choisie de façon à limiter l'influence des résidus élevés. La complexité des algorithmes associés est  $O(Nn^4)$  ou  $O(Nn^3)$ , selon que des méthodes creuses sont utilisées ou pas. Afin d'améliorer la robustesse au bruit et aux données aberrantes, il a également été proposé dans [7] de modifier la résolution matricielle de [8] pour résoudre le problème régularisé au sens de Tikhonov

$$\mathcal{F}_T(Z) = \iint_\Omega (\|\nabla Z - G\|^2 + \lambda \|\nabla Z\|^2) \, dx dy \quad (10)$$

avec  $\lambda > 0$ . La complexité reste en  $O(n^3)$ , ce qui en fait la méthode la plus rapide pour la reconstruction 3D régularisée. Cependant, la régularisation proposée n'est pas robuste aux discontinuités de profondeur, puisque le terme d'attache aux données et le terme de lissage dans (10) sont tous deux quadratiques. Les caractéristiques de toutes ces méthodes d'intégration sont résumées dans la table 1.

Condition au bord	Méthode	Moindres carrés	Régularisation
Périodique	FFT	[6] - $O(n^2)$	<b>Méthode proposée</b> - $O(Nn^2)$
Dirichlet	DST Formulation matricielle	[12] - $O(n^2)$ [7] - $O(n^3)$	<b>Méthode proposée</b> - $O(Nn^2)$ -
Neumann homogène	Résolution directe d'un système creux	[1] - $O(n^3)$	[2] - $O(Nn^3)$
Neumann	DCT Formulation matricielle Résolution itérative d'un système linéaire Résolution directe d'un système creux	[12] - $O(n^2)$ [8] - $O(n^3)$ [10, 5] - $O(Nn^4)$	<b>Méthode proposée</b> - $O(Nn^2)$ [7] - $O(n^3)$ [2, 4] - $O(Nn^4)$ <b>Méthode proposée</b> - $O(n^3)$

TABLE 1 – Complexité des méthodes d'intégration fondées sur un critère aux moindres carrés, et de leurs équivalents introduisant une régularisation : ceci suppose généralement l'utilisation d'un algorithme itératif ( $N$  désigne le nombre d'itérations). Les méthodes proposées étendent les méthodes analytiques utilisant la transformation de Fourier [6, 12] ou les méthodes de résolution de systèmes creux [1].

## 2 Méthodes proposées

### 2.1 Présentation formelle

On s'intéresse à la minimisation de la fonctionnelle (6), où les poids  $w$ , qui sont fixés, ne dépendent pas de l'inconnue  $Z$  (nous proposerons dans la suite plusieurs façons de calculer ces poids). Comme pour l'équation de diffusion anisotrope [11], l'équation d'Euler-Lagrange associée à (6) s'écrit

$$\Delta Z = \nabla \cdot G - \nabla(\log w) \cdot (\nabla Z - G) \quad (11)$$

accompagnée d'une condition au bord bien choisie.

Si  $w = 1$  en tout point (pondération uniforme), (11) se ramène à (5), ce qui correspond à la solution aux moindres carrés.

Si  $w$  n'est pas uniforme, l'équation (11) est toujours linéaire en  $Z$ , mais ses coefficients ne sont plus constants. La solution de (11) peut être obtenue, dans ce cas, en évaluant la limite de la suite définie par la récurrence

$$\begin{cases} Z^0 = Z_0 \\ \Delta Z^{k+1} = \nabla \cdot G - \nabla(\log w) \cdot (\nabla Z^k - G) \end{cases} \quad (12)$$

avec une condition au bord à chaque pas, où  $Z_0$  est par exemple la solution aux moindres carrés [2, 4]. Le schéma semi-implicite (12) implique donc la résolution d'une équation de Poisson à chaque pas, ce qui peut être réalisé très efficacement pour des domaines de reconstruction rectangulaires par transformation de Fourier. Nous détaillons cette approche dans le prochain paragraphe.

Cependant, et contrairement à [2, 4], les poids  $w$  ne dépendent pas de l'inconnue  $Z$ , donc une autre approche consiste à résoudre le système linéaire (11) de manière directe, en utilisant par exemple la décomposition LU creuse. Ceci permet en outre de traiter des domaines de reconstruction non rectangulaires. Nous présentons cette approche dans le paragraphe 2.3.

### 2.2 Résolution itérative

Dans ce paragraphe,  $\Omega$  est supposé rectangulaire, tel que  $\Omega = [0; m - 1] \times [0; n - 1]$ .

**Condition au bord périodique.** Notons  $\hat{A}$  la transformée de Fourier 2D d'une fonction  $A$ ,  $j_0$  le complexe tel que  $j_0^2 = -1$ , et

$$f^k = -\nabla(\log w) \cdot (\nabla Z^k - G) \quad (13)$$

La transformée de Fourier de la relation de récurrence (12) s'écrit

$$-4\pi^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)\hat{Z}^{k+1} = 2\pi j_0(\omega_x \hat{p} + \omega_y \hat{q}) + \hat{f}^k \quad (14)$$

d'où la transformée de Fourier discrète de  $Z^{k+1}$  :

$$\hat{Z}_{r,s}^{k+1} = -\frac{2\pi j_0(\frac{r}{m}\hat{p}_{r,s} + \frac{s}{n}\hat{q}_{r,s}) + \hat{f}_{r,s}^k}{4\pi^2(\frac{r^2}{m^2} + \frac{s^2}{n^2})} \quad (15)$$

où  $(r, s) \in [0, m - 1] \times [0, n - 1] \setminus (0, 0)$ . L'équation (15) permet d'obtenir rapidement  $Z^{k+1}$ , grâce à l'algorithme FFT. Si  $w \equiv 1$ , alors  $\hat{f}^k \equiv 0$  et la méthode converge immédiatement : ce cas correspond à la méthode de Frankot et Chellappa [6].

**Condition de Dirichlet.** Supposons  $Z$  connu sur le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Soit  $\Pi$  l'opérateur de projection permettant de sélectionner les valeurs de  $Z$  sur l'intérieur  $\overset{\circ}{\Omega}$  de  $\Omega$ . Soit également  $Z_B$  la fonction égale aux valeurs connues sur  $\partial\Omega$ , et nulle ailleurs. On montre que la méthode de Simchony *et al.* [12] peut être modifiée de façon à obtenir le schéma de résolution suivant de l'équation (11) :

$$\begin{cases} \Pi(Z^{k+1}) = \text{DST}^{-1} \left( \frac{\text{DST}(\Pi(\nabla \cdot G - \Delta Z_B + f^k))}{\Pi(2 \cos(\frac{\pi r}{m}) + 2 \cos(\frac{\pi s}{n}) - 4)} \right) \\ Z^{k+1} = Z_B \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (16)$$

où DST désigne la transformée en sinus discrète 2D. Notons que le dénominateur dans (16) ne s'annule que si  $r = s = 0$ , ce qui laisse à penser que  $Z^{k+1}$  n'est estimable qu'à une constante additive près. Cependant,  $Z$  étant supposé connu sur  $\partial\Omega$ , l'estimation de  $Z^{k+1}$  est bien unique. Notons également que le cas  $w \equiv 1$ , qui implique  $f^k \equiv 0$ , correspond à la méthode de Simchony *et al.* [12].

**Condition de Neumann.** Le cas d'une condition de Neumann étant également traité par Simchony *et al.* dans [12], il est possible d'adapter cette méthode de façon à prendre en compte le terme  $f^k$ . Soit

$$g = \begin{cases} \nabla \cdot G & \text{sur } \overset{\circ}{\Omega} \\ -\nu \cdot G & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (17)$$

On peut montrer que  $Z^{k+1}$  s'obtient par :

$$Z^{k+1} = \text{DCT}^{-1} \left( \frac{\text{DCT}(g + f^k)}{2 \cos(\frac{\pi r}{m}) + 2 \cos(\frac{\pi s}{n}) - 4} \right) \quad (18)$$

où DCT désigne la transformation en cosinus discrète 2D. Le dénominateur dans (18) s'annule si  $r = s = 0$ , et  $Z$  n'est plus supposé connu sur  $\partial\Omega$ . Il en résulte que  $Z^{k+1}$  ne peut être estimé qu'à une constante additive près, ce qui est cohérent avec la forme de l'équation initiale (2).

### 2.3 Résolution directe

Dans [2, 4], le choix d'un algorithme itératif pour la résolution de (11) est motivé par le fait que la pondération dépend du résidu  $(\nabla Z - G)$ . Considérer une pondération  $w$  qui ne dépende pas de l'inconnue  $Z$  est un avantage majeur : comme l'équation (11) reste linéaire en  $Z$ , on peut utiliser des méthodes de résolution directes. Soit

$$\kappa = \nabla \cdot G + \nabla(\log w) \cdot G \quad (19)$$

et

$$\nabla(\log w) = [C_x, C_y]^\top \quad (20)$$

La discrétisation de l'équation (11) s'écrit, pour tout  $(i, j) \in \overset{\circ}{\Omega}$  :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{C_x(i, j)}{2}\right) Z(i+1, j) + \left(1 - \frac{C_x(i, j)}{2}\right) Z(i-1, j) \\ & + \left(1 + \frac{C_y(i, j)}{2}\right) Z(i, j+1) + \left(1 - \frac{C_y(i, j)}{2}\right) Z(i, j-1) \\ & - 4Z(i, j) = \kappa(i, j) \end{aligned} \quad (21)$$

À cause du manque de place, nous présentons uniquement les résultats pour la condition de Neumann, mais d'autres conditions au bord peuvent être très naturellement prises en compte. En stockant les valeurs de  $Z$  et de  $\kappa$  colonne par colonne, et en utilisant la condition au bord de Neumann, les équations (21) peuvent être regroupées en

$$AZ = B \quad (22)$$

où  $A$  et  $B$  désignent, respectivement, une matrice creuse  $|\Omega| \times |\Omega|$  ( $|\Omega|$  désigne le cardinal de  $\Omega$ ) représentant un opérateur laplacien modifié, et un vecteur de taille  $|\Omega|$  contenant les valeurs de  $\kappa$ . Plus précisément, chaque ligne de  $A$  correspondant à un point de  $\overset{\circ}{\Omega}$  aura une entrée égale à  $-4$ , et quatre entrées égales à  $1 \pm \frac{C_{x,y}}{2}$ . Notons que  $A$  et  $B$  doivent être modifiés afin de prendre correctement en compte la condition au bord. Notons également que,

contrairement à [12], la matrice  $A$  n'est pas une matrice de Toeplitz par blocs, mais elle reste très creuse : on peut donc utiliser la décomposition LU creuse  $PAQ = LU$ , où  $P$  est une matrice de permutation de lignes et  $Q$  sert à réordonner les colonnes tout en garantissant le caractère creux du système. Une telle factorisation peut être calculée en  $O(n^3)$ . Ensuite, la solution est obtenue par  $Z = QU^{-1}L^{-1}PB$ , qui peut être calculée par l'algorithme du pivot de Gauss, en un nombre d'opérations proportionnel au nombre d'entrées non nulles de  $L$  et  $U$ , soit  $O(n^2)$ . Enfin, notons que nous n'avons cette fois pas précisé, cette fois-ci, si  $\Omega$  était rectangulaire ou non : effectivement, cette approche permet de traiter tout type de domaine, pourvu qu'il soit connexe.

### 2.4 Choix de la pondération

**Cas où seul  $G$  est disponible.** On peut choisir pour les poids  $w$  des indicateurs du caractère localement intégrable du champ de gradient  $G$  : on peut par exemple choisir

$$w = \max \left\{ \epsilon, \frac{1}{1 + a|Z|} \right\} \quad (23)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre positif de faible valeur (dans notre implémentation,  $\epsilon = 0.01$ ) assurant  $w > 0$ ,  $a$  est un paramètre positif fixé par l'utilisateur et  $Z$  est défini par (3).

**Cas de la stéréophotométrie.** Dans le cadre de la stéréophotométrie [14],  $L$  images d'un objet sont prises sous le même point de vue, mais sous  $L$  éclairages différents. Chaque éclairage est supposé parallèle et uniforme, et peut donc être modélisé par un vecteur  $s^l \in \mathbb{R}^3$ ,  $l \in [1, L]$ . Sous l'hypothèse lambertienne, le niveau de gris dans l'image  $l$  en un pixel  $p_o$  est donné par

$$I_{p_o}^l = \rho_{p_o} \mu_{p_o}^\top s^l \quad (24)$$

où  $\rho_{p_o}$  représente l'albédo en  $p_o$ , et  $\mu_{p_o}$  la normale à la surface, unitaire sortante. Connaissant les éclairages  $s^l$ , on peut très facilement estimer  $\mu = [\mu_x, \mu_y, \mu_z]^\top$  en chaque point, puis en déduire  $G = [-\mu_x/\mu_z, -\mu_y/\mu_z]^\top$ . Malheureusement, une pondération telle que (23) n'est pas adaptée, car le champ  $G$  peut être corrompu par d'éventuels écarts au modèle lambertien (24). Nous proposons d'utiliser la pondération décrite dans [3], qui compare le vecteur  $I_{p_o} = [I_{p_o}^1, \dots, I_{p_o}^L]$  des niveaux de gris au pixel  $p_o$  aux vecteurs  $I_{p_i} = [I_{p_i}^1, \dots, I_{p_i}^L]$ ,  $i = 1 \dots 8$ , des niveaux de gris de ses huit plus proches voisins, en définissant

$$\mathcal{D}(p_o) = \max \left\{ \left\| \frac{I_{p_o}}{\|I_{p_o}\|} - \frac{I_{p_i}}{\|I_{p_i}\|} \right\|_\infty, i = 1 \dots 8 \right\} \quad (25)$$

où la normalisation des niveaux de gris dans (25) permet de garantir que des valeurs élevées de  $\mathcal{D}$  ne correspondent pas à des variations d'albédo [9]. Nous remplaçons la pondération (23) par

$$w = \max \{ \epsilon, \exp \{ -b\mathcal{D} \} \} \quad (26)$$

avec  $b > 0$ .

### 3 Validation expérimentale

#### 3.1 Évaluation quantitative sur des données de synthèse

Afin d'évaluer la précision des reconstructions 3D, nous considérons le même relief discontinu que dans [4], représenté sur la figure 2-a, dont le gradient  $\nabla u$  est représenté sur la figure 2-b. Les reconstructions 3D obtenues montrent que les discontinuités de profondeur sont mieux retrouvées avec les méthodes proposées.

Nous calculons la RMSE entre la surface originale et la surface reconstruite, et mesurons les temps CPU pour atteindre la convergence sur un processeur I7 à 2.7GHz dans des conditions comparables : pour les méthodes itératives, nous choisissons comme critère d'arrêt un seuil de  $10^{-4}$  sur l'écart relatif moyen entre deux pas successifs, et la constante d'intégration est choisie de façon à minimiser la RMSE. Les résultats sont regroupés dans la table 2.

	RMSE (pixels)	CPU (s)
Moindres carrés [8]	9.47	0.23
Tikhonov [7]	9.47	0.28
$\Phi$ -fonction [4]	2.87	81.3
M-estimateur [2]	10.18	34.9
<b>Itératif - périodique</b>	1.08	1.10
<b>Itératif - Dirichlet</b>	0.45	0.82
<b>Itératif - Neumann</b>	0.58	0.77
<b>Direct - Neumann</b>	0.49	0.32

TABLE 2 – Reconstructions 3D de la figure 2. Les méthodes proposées permettent de retrouver les discontinuités de profondeur, ce qui donne de plus faibles valeurs de la RMSE. De plus, les temps de calcul sont comparables à ceux de la reconstruction aux moindres carrés de [8], au contraire des méthodes de régularisation antérieures [2, 4].

Sur la figure 3-a, nous comparons les vitesses de convergence des schémas itératifs proposés et de la méthode  $\Phi_2$  décrite dans [4]. Les schémas proposés semblent converger tous les trois en des temps comparables. Cependant, la convergence est difficile à prouver, donc en général la méthode directe, qui est comparable en terme de rapidité, doit être préférée.

Enfin, sur la figure 3-b, nous évaluons l'influence du choix du paramètre  $a$  sur la reconstruction 3D. Le choix  $a = 0$  correspond à la solution aux moindres carrés, tandis que des valeurs élevées de  $a$  provoquent des instabilités numériques. Entre ces deux situations extrêmes, une valeur optimale de  $a$  semble exister, mais son estimation est laissée en perspective. Des considérations sur la distribution statistique du bruit pourraient sans doute aider, comme cela est proposé dans [2].

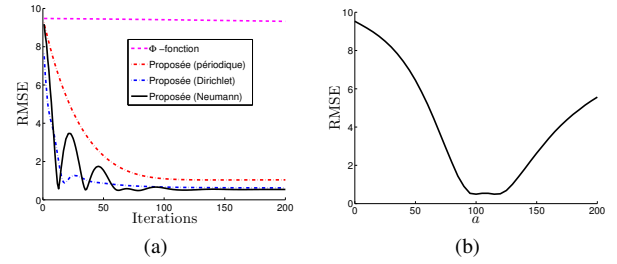


FIGURE 3 – (a) RMSE en fonction du nombre d'itérations, pour les trois méthodes itératives proposées et pour la méthode  $\Phi_2$  décrite dans [4]. Les méthodes proposées convergent beaucoup plus vite, même si on peut observer un comportement oscillatoire dont l'interprétation est laissée en perspective. (b) Évolution de la RMSE, calculée à la convergence, de l'une des méthodes proposées (Direct - Neumann), en fonction du paramètre  $a$ . Une valeur optimale semble exister. Des courbes similaires caractérisent les autres méthodes.

#### 3.2 Évaluation qualitative dans le cas de la stéréophotométrie

Nous montrons sur la figure 4 les pondérations (23) et (26) obtenues sur des données réelles de stéréophotométrie. À cause des imprécisions dans l'estimation des normales, la pondération (23), calculée à partir du critère d'intégrabilité, apparaît « bruitée » et est difficilement exploitable. La pondération (26), calculée directement à partir des images, est par contre indépendante de l'estimation des normales.

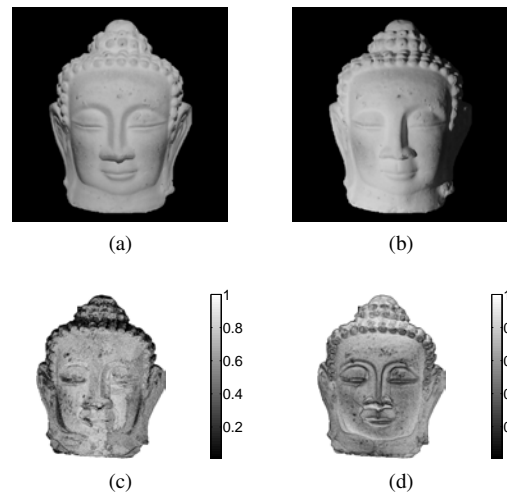


FIGURE 4 – Calcul des poids à partir d'images de stéréophotométrie : (a)-(b) deux images (parmi dix) de taille  $1062 \times 836$  d'un objet mat; (c) pondération (23) avec  $a = 20$ ; (d) pondération (26) avec  $b = 20$ , qui semble moins « bruitée ».

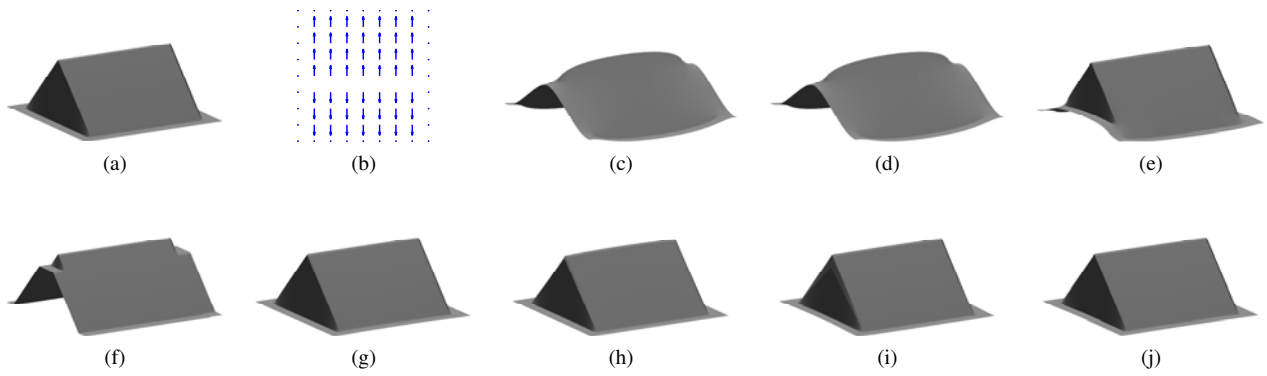


FIGURE 2 – Validation sur données de synthèse : (a) surface de test ( $m = n = 128$ ) et (b) son gradient ; (c) reconstruction 3D aux moindres carrés [8] ; (d) régularisation de Tikhonov [7] ; (e) régularisation  $\Phi_2$  de Durou *et al.* [4] ; (f) M-estimateur de Agrawal *et al.* [2] ; reconstructions 3D en utilisant le schéma itératif proposé ici, avec une condition au bord (g) périodique ( $a = 32$ ), (h) de type Dirichlet ( $a = 70$ ) ou (i) Neumann ( $a = 95$ ) ; (j) reconstruction 3D avec la méthode directe proposée ( $a = 100$ ). Seules les régularisations non quadratiques permettent de retrouver les arêtes.

La reconstruction 3D obtenue grâce à cette pondération est présentée sur la figure 5, et peut être comparée à la reconstruction 3D aux moindres carrés [8]. Grâce au choix d'une pondération fondée sur la détection des discontinuités de profondeur, les phénomènes de Gibbs observables sur les bords de l'objet à reconstruire sont atténués.

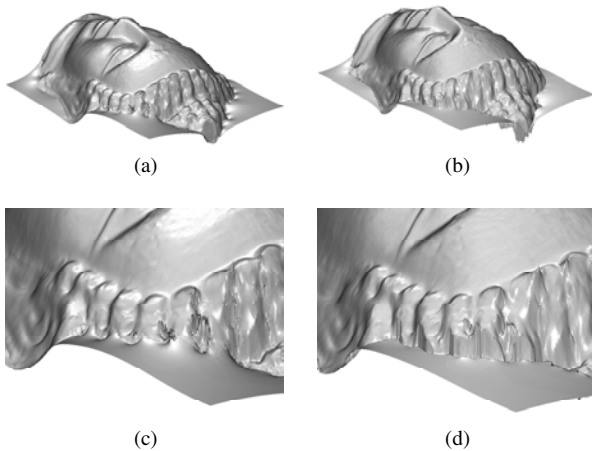


FIGURE 5 – Reconstructions 3D (a) aux moindres carrés [8] et (b) aux moindres carrés pondérés (méthode directe). Les deux reliefs sont similaires, sauf à proximité des discontinuités, ce qui est illustré sur les zooms (c) et (d).

La robustesse aux discontinuités d'une méthode d'intégration est nécessaire non seulement pour éviter de tels phénomènes gênants pour le rééclairage, mais également car ces phénomènes entraînent un biais global de la reconstruction 3D, comme cela est illustré sur la figure 6, où des vues latérales des reconstructions 3D sont comparées au relief original.

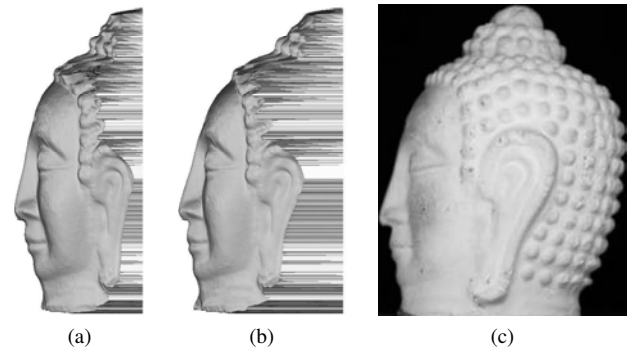


FIGURE 6 – Vues latérales des reconstructions 3D (a) aux moindres carrés [8] et (b) aux moindres carrés pondérés (méthode directe) ; (c) vue correspondante du relief réel. La reconstruction 3D aux moindres carrés pondérés est plus proche du relief réel.

## 4 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons proposé plusieurs méthodes d'intégration d'un champ de gradient, qui sont rapides et robustes aux discontinuités de profondeur, grâce à une pondération appropriée de la minimisation aux moindres carrés. Les résultats obtenus montrent cependant que la qualité de la reconstruction 3D dépend fortement de la pondération choisie. Une perspective naturelle de ce travail consistera à évaluer la robustesse de ces pondérations en présence de bruit et de données aberrantes : les méthodes proposées pourraient alors être couplées à des régularisations de type Tikhonov [7]. Enfin, le problème aux moindres carrés pondérés étudié dans cet article pourrait également être résolu en définissant un graphe pondéré, ce qui permettrait d'utiliser des méthodes de résolution plus efficaces [13].

## Références

- [1] A. AGRAWAL, R. CHELLAPPA et R. RASKAR : An algebraic approach to surface reconstruction from gradient fields. *In ICCV 2005*.
- [2] A. AGRAWAL, R. RASKAR et R. CHELLAPPA : What is the range of surface reconstructions from a gradient field ? *In ECCV 2006*.
- [3] B. DURIX, Y. QUEAU, V. CHARVILLAT et J.-D. DUROU : Quels prétraitements pour la stéréophotométrie non calibrée ? *In ORASIS 2013*, Cluny, France.
- [4] J.-D. DUROU, J.-F. AUJOL et F. COURTEILLE : Integrating the normal field of a surface in the presence of discontinuities. *In EMMCVPR 2009*.
- [5] J.-D. DUROU et F. COURTEILLE : Integration of a normal field without boundary condition. *In PACV 2007*.
- [6] R. T. FRANKOT et R. CHELLAPPA : A Method for enforcing integrability in shape from shading algorithms. *IEEE T-PAMI*, 10(4):439–451, 1988.
- [7] M. HARKER et P. O’LEARY : Least squares surface reconstruction from gradients: Direct algebraic methods with spectral, Tikhonov, and constrained regularization. *In CVPR 2011*.
- [8] M. HARKER et P. O’LEARY : Least squares surface reconstruction from measured gradient fields. *In CVPR 2008*.
- [9] A. HERTZMANN et S. M. SEITZ : Example-based photometric stereo: shape reconstruction with general, varying BRDFs. *IEEE T-PAMI*, 27(8):1254–1264, 2005.
- [10] B. K .P. HORN et M. J. BROOKS : The variational approach to shape from shading. *CVGIP*, 33(2):174–208, 1986.
- [11] P. PERONA et J. MALIK : Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE T-PAMI*, 12(7):629–639, 1990.
- [12] T. SIMCHONY, R. CHELLAPPA et M. SHAO : Direct analytical methods for solving Poisson equations in computer vision problems. *IEEE T-PAMI*, 12(5):435–446, 1990.
- [13] V.-T. TA, A. ELMOATAZ et O. LEZORAY : Nonlocal PDEs-based morphology on weighted graphs for image and data processing. *IEEE T-IP*, 20(6):1504–1516, 2011.
- [14] R. J. WOODHAM : Photometric method for determining surface orientation from multiple images. *Optical Engineering*, 19(1):139–144, 1980.