



Open Archive TOULOUSE Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in : <http://oatao.univ-toulouse.fr/>
Eprints ID : 12515

The contribution was presented at GRETSI 2013 :
<http://gretsi.fr/colloque2013/>

To cite this version : Vernhes, Jean-Adrien and Chabert, Marie and Lacaze, Bernard *Conversion Numérique-Analogique sélective d'un signal passe-bande soumis à des interférences*. (2013) In: 24eme Colloque Groupe de Recherche et d'Etudes du Traitement du Signal et des Images (GRETSI 2013), 2 September 2013 - 6 September 2013 (Brest, France).

Any correspondance concerning this service should be sent to the repository administrator: staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

Conversion Numérique-Analogique sélective d'un signal passe-bande soumis à des interférences

Jean-Adrien VERNHES^{1,2}, Marie CHABERT², Bernard LACAZE¹

¹TéSA, 14/16 Port St-Etienne, 31000 Toulouse, France

²Université de Toulouse, INP-ENSEEIH/IRIT, 2 rue Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse Cedex 7, France

{jean-adrien.vernhes, bernard.lacaze}@tesa.prd.fr
marie.chabert@enseeiht.fr

Résumé – Cet article propose une méthode qui permet une conversion numérique-analogique sélective d'un processus aléatoire passe-bande soumis à des interférences. Cette méthode permet d'effectuer simultanément la conversion numérique-analogique du signal et le rejet de l'interférence à partir des échantillons du processus observé : aucune démodulation préalable du processus passe-bande n'est nécessaire et le filtrage est effectué dans le domaine temporel grâce à l'expression explicite des coefficients du filtre. La méthode se base sur l'utilisation d'un schéma d'échantillonnage périodique non uniforme appelé PNS2 (pour *Periodic Nonuniform Sampling* d'ordre 2) qui utilise deux séquences d'échantillonnage périodique entrelacées. Des formules appropriées sont établies afin de reconstruire le signal, permettant également de supprimer l'interférence grâce à un filtrage sélectif. L'observation sur une fenêtre de taille infinie (nombre infini d'échantillons) mène à une reconstruction exacte. Cependant, dans les applications, la conversion numérique-analogique est généralement pratiquée en temps réel à l'aide d'une fenêtre d'observation glissante et de taille finie (nombre fini d'échantillons). Ainsi les formules de reconstruction doivent avoir un taux de convergence élevé. Cet article propose donc des formules avec différents taux de convergence grâce à l'utilisation de filtres avec des fonctions de transfert de régularité croissante. Des simulations se basant sur la variation de différents paramètres expérimentaux nous ont permis de tester la méthode.

Abstract – This paper proposes a method for selective digital-to-analog conversion of a stationary band-pass random process submitted to interference. This method simultaneously performs the signal digital-to-analog conversion and the interference rejection from the observed process samples: it does not require any preliminary demodulation of the bandpass observed process and the filtering is performed in the time domain using an explicit expression of the filter taps. The method uses a particular non uniform sampling scheme called Periodic Non-uniform Sampling of order 2 (PNS2). The PNS2 sampling scheme uses two interleaved sample sequences. Appropriate formulas are derived to reconstruct the signal from its non-uniform samples while removing the interference by a selective filtering. The reconstruction from an infinite observation window (an infinite number of samples) is exact. However, in practical applications, the digital-to-analog conversion is generally performed in real time using a finite sliding observation window (a finite number of samples). Thus the reconstruction formulas should also demonstrate a high convergence rate. This paper proposes reconstruction formulas with increasing convergence rates using filters with increasingly regular transfer functions. The proposed method has been tested through simulations according to experimental parameters.

1 Introduction

Dans de nombreuses applications, le signal d'intérêt peut être modélisé comme un signal passe-bande perturbé par des interférences passe-bande. C'est le cas par exemple dans les communications multi-utilisateur se basant sur l'utilisation de la technique d'accès multiple FDMA (*Frequency Division Multiple Access*). Dans cette application, la réduction des interférences dues aux canaux adjacents est un problème clé traité par exemple dans [1]. La méthode proposée permet d'effectuer simultanément la conversion numérique-analogique du signal et le rejet de l'interférence à partir des échantillons du processus observé. Cette méthode se base sur l'utilisation d'un schéma d'échantillonnage périodique non-uniforme appelé PNSL (*Periodic Nonuniform Sampling* d'ordre L) [2], [3], [4], [5], [6]. Ce schéma utilise L séquences d'échantillonnage entrelacées, chacune possédant le même taux d'échantillonnage choisi d'après le critère de Landau relatif à la bande passante du signal [7]. Ce schéma permet de modéliser par exemple des défauts de Convertisseurs Analogique-Numérique (CAN) entrelacés tem-

poriellement. En raison de l'augmentation des débits de données et de la bande nécessaire, des CAN opérant à grande vitesse sont nécessaires dans les systèmes de communications numériques modernes. Les CAN entrelacés temporellement offrent une solution efficace tout en maintenant un coût de production faible : le signal est traité en parallèle par L CAN régulièrement espacés et opérant tous au même taux d'échantillonnage. Ce schéma a été développé par de nombreuses entreprises fabriquant des CAN [8]. Cependant, en pratique, les phases entre deux CAN successifs ne sont pas identiques. Le modèle théorique approprié est donc celui d'un schéma d'échantillonnage non-uniforme conforme à un PNSL [9]. Ce schéma a la particularité de réduire la fréquence d'échantillonnage nécessaire mais également de réduire l'aliasing [5], [6]. Par ailleurs, une reconstruction exacte du signal est possible à partir d'une fenêtre d'observation de taille infinie en supposant la connaissance *a priori* de la bande spectrale du signal [10]. Notons toutefois que dans les applications pratiques la conversion numérique analogique est généralement effectuée en temps réel à

partir d'une fenêtre d'observation glissante et de taille finie. C'est pourquoi les formules de reconstruction doivent avoir un taux de convergence élevé [8], [11]. Cet article propose des formules avec des taux de convergence croissants. Le plan est le suivant. La partie 1 présente la modélisation du signal et le schéma d'échantillonnage utilisé. La partie 2 détaille l'opération de filtrage puis les différents modèles de filtres et les propriétés de convergence associées, ainsi que les formules de reconstruction dans chaque cas. La partie 3 présente l'analyse des performances de la méthode selon différents scénarios. La conclusion et les pistes futures se trouvent dans la partie 4.

1.1 Modèle du signal

Le signal d'intérêt ou signal utile est un processus aléatoire stationnaire $\mathbf{Z} = \{Z(t), t \in \mathbb{R}\}$ de moyenne nulle, de variance finie et de densité spectrale de puissance $s_Z(\omega)$ définie par :

$$E[Z(t)Z^*(t - \tau)] = \int_{\Delta} e^{i\omega\tau} s_Z(\omega) d\omega. \quad (1)$$

où $E[\dots]$ représente l'espérance mathématique et $*$ représente le conjugué complexe. Pour des raisons de simplicité, cet article considère un signal passe-bande dont le support spectral Δ est inclus dans Δ_l défini par :

$$\Delta_l = ((-2l - 1)\pi, (-2l + 1)\pi) \cup ((2l - 1)\pi, (2l + 1)\pi) \quad (2)$$

où $l \in \mathbb{N}$. Les signaux passe-bas correspondent à $l = 0$, soit $\Delta_0 = (-\pi, \pi)$, tandis que les signaux passe-bande correspondent à $l \neq 0$. Toutes les formules présentées sont valables pour des signaux passe-bas et passe-bande. Néanmoins nous nous concentrerons plus particulièrement sur le cas des signaux passe-bande dans cet article. Le signal observé est constitué de ce signal d'intérêt et d'un signal d'interférence défini sur la sous-bande Δ_{int} . On considère cette interférence comme indésirable et on suppose qu'elle n'est pas localisée dans la même sous-bande que le signal utile, à savoir $\Delta_{int} \subset \Delta_l \setminus \Delta$, ce qui signifie que les supports spectraux sont distincts. Cet article propose de trouver des formules de reconstruction exacte du signal utile tout en effectuant une suppression complète de l'interférence si cette condition est respectée.

1.2 Schéma d'échantillonnage PNS2

Le schéma d'échantillonnage PNS2 est adapté aux signaux passe-bande ($l \neq 0$) et il est basé sur l'utilisation de deux séquences d'échantillonnage périodique entrelacées :

$$\mathbf{t}^a = \{n + a, n \in \mathbb{Z}\} \text{ et } \mathbf{t}^b = \{n + b, n \in \mathbb{Z}\}. \quad (3)$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Le taux d'échantillonnage moyen associé est égal à 2 dans ce cas et est donc adapté à la bande passante du signal (égale à 4π) selon le critère de Landau [7]. Cela permet de passer outre le critère Nyquist qui se base sur la fréquence maximale du signal. Pour des signaux passe-bande ($l \neq 0$), sous la condition que $2l(b - a) \notin \mathbb{Z}$, la reconstruction du signal est possible à partir de ce schéma d'échantillonnage grâce à la formule suivante [10] :

$$Z(t) = \frac{A_a(t) \sin [2\pi l(t - b)] + A_b(t) \sin [2\pi l(a - t)]}{\sin [2\pi l(a - b)]}$$

avec $A_x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin[\pi(t-n-x)]}{\pi(t-n-x)} Z(n+x)$. Des formules à convergence accélérée ont également été proposées dans [12]. Cependant cette formule permet une reconstruction du signal sur la totalité de la bande Δ_l , ce qui signifie dans notre cas que l'interférence est également reconstruite. La méthode proposée dans cet article permet de reconstruire uniquement le signal situé dans une sous-bande spécifique, soit dans notre cas dans la sous-bande Δ , support du signal utile.

2 Formules de reconstruction et filtres associés

La reconstruction sélective d'une bande spectrale donnée est effectuée grâce au schéma d'échantillonnage PNS2 combiné à l'utilisation d'un filtre linéaire invariant dans le temps. Considérons \mathcal{F} un tel filtre de réponse impulsionnelle $f(t)$ et de fonction de transfert $F(\omega)$ telle que $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega u} du$. Lorsque l'on applique le processus \mathbf{Z} en entrée, la sortie est le processus $\mathbf{U} = \mathcal{F}[\mathbf{Z}]$ défini par $U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)Z(t-u) du$. En choisissant un modèle de filtre adapté à la bande Δ du signal utile, \mathbf{U} représente le résultat numérique de l'opération de filtrage de l'interférence. Plus précisément, le filtre sera choisi tel que $F(\omega) = 0$ pour $\omega \in \Delta_{int}$. Ensuite selon [10] et [13], une reconstruction sans erreur de \mathbf{U} est possible car la bande spectrale Δ_l est seulement séparé en deux sous-supports (2). Cela revient donc à retrouver le signal utile sans aucun impact

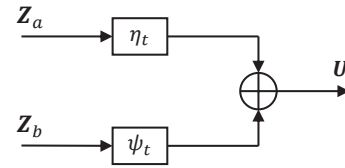


FIGURE 1 – Schéma de filtrage

de l'interférence. En conséquence le processus filtré \mathbf{U} est reconstruit selon le schéma présenté dans la figure 1 où η_t, ψ_t sont les gains complexes des filtres numériques :

$$\eta_t(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t)e^{-in\omega}, \quad \psi_t(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n(t)e^{-in\omega}.$$

qui ont pour entrées $\mathbf{Z}_a = \{Z(n+a), n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbf{Z}_b = \{Z(n+b), n \in \mathbb{Z}\}$. Ce schéma particulier appelé schéma symétrique provient de l'étude de projections orthogonales sur des espaces de Hilbert particuliers dont le détail est présenté dans [10] and [13]. En utilisant l'isométrie fondamentale et les résultats donnés dans [13], on peut en déduire la formule de reconstruction :

$$U(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{-n}(t)Z(n+a) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{-n}(t)Z(n+b) \quad (4)$$

Dans les applications pratiques, les sommes infinies nécessitent une troncature. La reconstruction du signal est donc effectuée sur une fenêtre d'observation de taille fixe. Soit N la taille de cette fenêtre d'observation, autrement dit le nombre d'échantillons disponibles dans une des deux séquences. La formule de reconstruction tronquée s'exprime ainsi :

$$\tilde{U}(t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_{-n}(t)Z(n+a) + \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} b_{-n}(t)Z(n+b) \quad (5)$$

L'expression des fonctions d'interpolation $a_n(t)$ et $b_n(t)$ dépend de la fonction de transfert $F(\omega)$ utilisée. Dans la suite, nous proposons trois fonctions de transfert différentes. La première correspond à un filtre rectangulaire qui donne la formule dite de référence. Le taux de convergence associé est en n^{-1} . Dans les applications pratiques, il peut être intéressant d'améliorer ce taux de convergence pour régler le problème du nombre limité d'échantillons disponibles. Dans ce but, d'autres filtres sont également considérés. Leurs propriétés de continuité et de dérivation mènent à des taux de convergence respectivement en n^{-2} et en n^{-3} . D'autres filtres peuvent facilement être construits (grâce à des fonctions polynomiales par exemple) afin d'atteindre des taux plus élevés. Dans la suite, nous considérons la bande passante du signal utile telle que :

$$\Delta = \Delta_{\alpha_1, \alpha_2} = (-\alpha_2, -\alpha_1) \cup (\alpha_1, \alpha_2) \subset \Delta_l \quad (6)$$

avec $(2l-1)\pi < \alpha_1 \leq \alpha_2 < (2l+1)\pi$. Nous définissons également : $\alpha_m = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$ et $\alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \geq 0$, tandis que β représente la largeur de la bande de transition du filtre.

2.1 Filtre rectangulaire

Les formules de référence sont obtenues pour un filtre rectangulaire. Ce filtre $\mathcal{F}_{\alpha_1, \alpha_2}$ est défini sur le support Δ_l (2) par la fonction de transfert :

$$F_{\alpha_1, \alpha_2}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega \in \Delta_{\alpha_1, \alpha_2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les fonctions d'interpolation $a_n(t)$ sont définies comme :

$$a_n(t) = \frac{\sin[\alpha_m(t-a+n) + 2\pi l(a-b)] \sin[\alpha(t-a+n)]}{\pi(t-a+n) \sin[2\pi l(a-b)]} \quad (7)$$

Les $b_n(t)$ sont obtenues par symétrie en changeant a et b et inversement. Etant donné que la fonction de transfert de ce filtre n'est pas continue en certains points, le taux de convergence est en n^{-1} : $a_n(t) \underset{n \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{n}$.

2.2 Filtre trapézoïdal

Afin d'atteindre un taux de convergence en n^{-2} , un filtre trapézoïdal $\mathcal{F}_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}$ est défini sur le support Δ_l (2) par la fonction de transfert :

$$F_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \Delta_{\alpha_1, \alpha_2} \\ \frac{-\omega + \alpha_2}{\beta} + 1 & \omega \in (\alpha_2, \alpha_2 + \beta) \\ \frac{\omega - \alpha_1}{\beta} + 1 & \omega \in (\alpha_1 - \beta, \alpha_1) \\ \frac{-\omega - \alpha_1}{\beta} + 1 & \omega \in (-\alpha_1, -\alpha_1 + \beta) \\ \frac{\omega + \alpha_2}{\beta} + 1 & \omega \in (-\alpha_2 - \beta, -\alpha_2) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec :

$$(2l-1)\pi \leq \alpha_1 - \beta < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \alpha_2 + \beta \leq (2l+1)\pi \quad (8)$$

Les fonctions d'interpolation $a_n(t)$ ont pour expression :

$$a_n(t) = \frac{\sin[\alpha_m(t-a+n) + 2\pi l(a-b)]}{\pi\beta \sin[2\pi l(b-a)](t-a+n)^2} \times (\cos[(\alpha+\beta)(t-a+n)] - \cos[\alpha(t-a+n)]) \quad (9)$$

Les $b_n(t)$ sont obtenues par symétrie en changeant a et b et inversement. Etant donné que le filtre $F_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}$ est continu sur l'intervalle Δ_l mais n'est pas dérivable en $\alpha_1 - \beta$, α_1 , α_2 et $\alpha_2 + \beta$ [14], le taux de convergence de ce filtre est en n^{-2} : $a_n(t) \underset{n \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{n^2}$.

2.3 Filtre en cosinus surélevé

Afin d'atteindre un taux de convergence en n^{-3} , un filtre en cosinus surélevé $\mathcal{G}_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}$ est défini sur le support Δ_l (2) par la fonction de transfert :

$$G_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \Delta_{\alpha_1, \alpha_2} \\ \cos^2\left[\frac{\pi}{2\beta}(\omega - \alpha_2)\right] & \omega \in (\alpha_2, \alpha_2 + \beta) \\ \cos^2\left[\frac{\pi}{2\beta}(\omega - \alpha_1)\right] & \omega \in (\alpha_1 - \beta, \alpha_1) \\ \cos^2\left[\frac{\pi}{2\beta}(\omega + \alpha_1)\right] & \omega \in (-\alpha_1, -\alpha_1 + \beta) \\ \cos^2\left[\frac{\pi}{2\beta}(\omega + \alpha_2)\right] & \omega \in (-\alpha_2 - \beta, -\alpha_2) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les fonctions d'interpolation $a_n(t)$ ont pour expression :

$$a_n(t) = \frac{\beta^2 \sin[\alpha_m(t-a+n) + 2\pi l(a-b)]}{2\pi \sin[2\pi l(b-a)](t-a+n)[(t-a+n)^2 - \beta^2]} \times (\sin[\alpha(t-a+n)] + \sin[(\alpha+\beta)(t-a+n)]) \quad (10)$$

Les $b_n(t)$ sont obtenues en changeant a et b et inversement. Etant donné que $G_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}$ est dérivable sur l'intervalle Δ_l et que sa dérivée est continue sur le même intervalle, le taux de convergence de ce filtre est en n^{-3} : $a_n(t) \underset{n \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{n^3}$.

3 Analyse des performances

Dans les simulations, nous étudions un signal passe-bande situé dans la bande $\Delta_3 = (-7\pi, -5\pi) \cup (5\pi, 7\pi)$ correspondant à $l = 3$. Le signal utile est modélisé par la somme d'un sinus à la pulsation $6\pi - \frac{\pi}{2}$ avec une phase aléatoire (uniformément distribuée sur $[0, 2\pi)$) et un bruit blanc dans la bande $\Delta = (6\pi - \frac{3\pi}{4}, 6\pi - \frac{\pi}{4}) \cup (-6\pi + \frac{\pi}{4}, -6\pi + \frac{3\pi}{4})$. L'interférence est un sinus à la pulsation $6\pi + \frac{\pi}{2}$ avec une phase aléatoire. La densité spectrale de puissance de ce signal reçu est tracée sur la figure 2. Nous avons également représenté la forme du filtre en cosinus surélevé (avec les paramètres $\alpha_1 = 6\pi - \frac{3\pi}{4}$, $\alpha_2 = 6\pi - \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$) utilisée pour les simulations. Le signal reçu est ensuite échantillonné selon les séquences entrelacées \mathbf{t}^a et \mathbf{t}^b avec $a = 0.3$ and $b = 0.777$. Dans les applications pratiques, la reconstruction est effectuée sur une fenêtre glissante mais les performances sont optimales au centre de cette fenêtre. Dans la suite, les formules sont comparées grâce à l'estimation de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de reconstruction entre le signal estimé et le signal utile. Cette erreur est calculée pour $t = 0$ qui correspond au centre de la fenêtre et elle est calculée à partir de $n_{it} = 1000$ générations de signal. La figure 3 montre l'influence de la taille N de la fenêtre tandis que la figure 4 montre l'influence de la distance entre les deux sinus

(signal utile et interférence) pour $N = 100$. Nous retrouvons le taux de convergence attendu pour chaque filtre et la distance n'a aucun impact sur la reconstruction tant que l'interférence se trouve en dehors du filtre. Néanmoins nous pouvons noter que l'utilisation d'un filtre régulier (trapézoïdal ou en cosinus surélevé) nécessite une bande de garde qui correspond à la bande de transition du filtre. Pour un filtre rectangulaire il n'y a pas de bande de garde, ce qui permet d'avoir des conditions moins restrictives quant à la proximité de l'interférence.

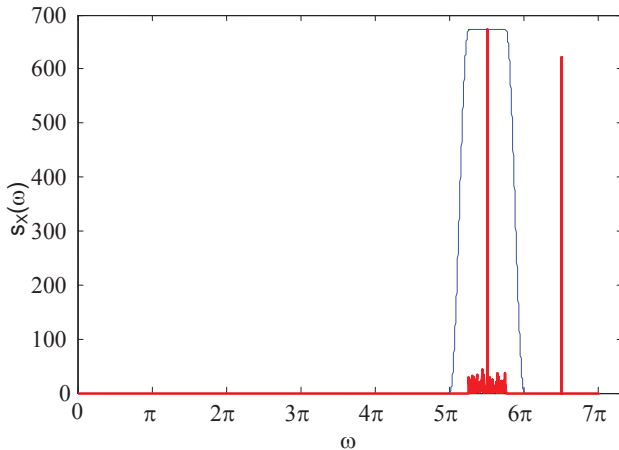


FIGURE 2 – Densité spectrale de puissance et forme du filtre

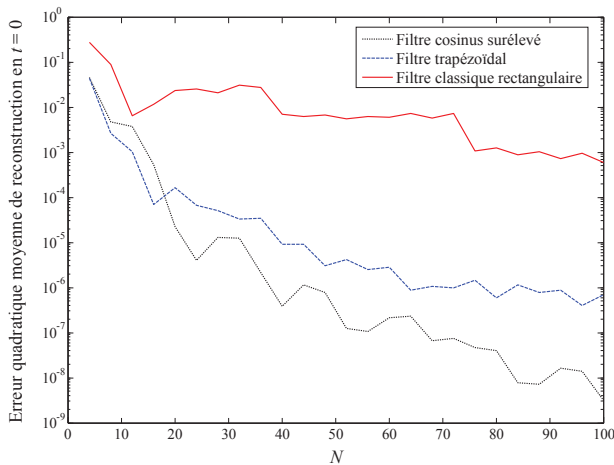


FIGURE 3 – Influence de la taille de la fenêtre

4 Conclusion

Cet article propose une méthode permettant d'effectuer simultanément la conversion numérique-analogique d'un signal passe-bande et une opération de filtrage de ce même signal. Cette méthode permet d'annuler une interférence située en dehors de la bande du signal et d'effectuer une reconstruction sans erreur. Basée sur l'utilisation d'un schéma d'échantillonnage non-uniforme PNS2, la méthode permet de travailler directement et numériquement sur le signal passe-bande, sans démodulation préalable ni transition dans le domaine fréquentiel, et à faible fréquence d'échantillonnage fixée selon le critère de Landau. Le choix de filtres spécifiques conduisant à

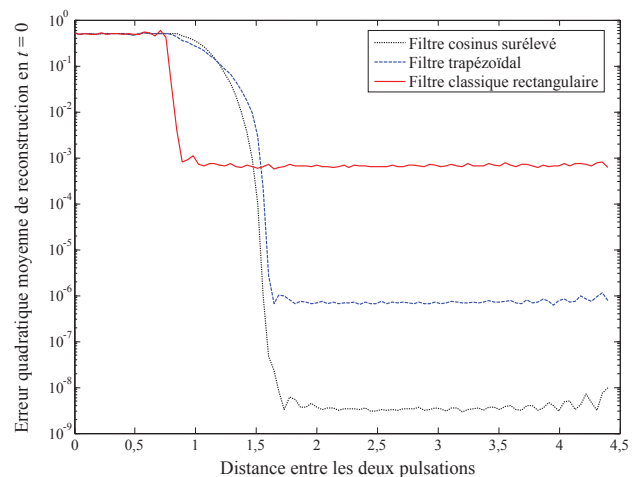


FIGURE 4 – Influence de la distance entre les raies

des formules de reconstruction rapide permet de s'adapter au problème du faible nombre d'échantillons disponibles rencontré dans les applications pratiques. La recherche de meilleurs taux de convergence peut être étendue grâce à la prise en compte de filtres possédant des fonctions de transfert plus régulières.

Remerciements

Ce travail a été effectué grâce au soutien financier de Thales Alenia Space et du Centre National d'Etudes Spatiales (CNES).

Références

- [1] T. Renk, C. Kloeck, C. Koerner, and F. K. Jondral, "Increasing spectral efficiency by managing adjacent channel interference," in *Proceedings of the first international workshop on technology and policy for accessing spectrum*, New York, NY, USA, 2006, TAPAS '06, ACM.
- [2] J. L. Yen, "On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals," *IRE Trans. on Circ. Th.*, vol. CT-3, no. 12, pp. 251–257, 1956.
- [3] J. R. Higgins, "A sampling theorem for irregular sample points," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 22, pp. 621–622, 1976.
- [4] J. R. Higgins, "Some gap sampling series for multiband signals," *Signal Processing*, vol. 12, no. 66, pp. 313–319, April 1987.
- [5] Y-P. Lin and P. P. Vaidyanathan, "Periodically nonuniform sampling of bandpass signals," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 45, no. 3, pp. 340–351, 1998.
- [6] A. Kohlenberg, "Exact interpolation of band-limited functions," *J. Appl. Phys.*, vol. 24, no. 12, pp. 1432–1436, Dec. 1953.
- [7] H. J. Landau, "Sampling, data transmission, and the Nyquist rate," *Proc. IEEE*, vol. 55, no. 10, pp. 11701–1706, Oct. 1967.
- [8] T. Strohmer and J. Tanner, "Fast reconstruction methods for bandlimited functions from periodic nonuniform sampling," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 44, no. 3, pp. 1073–1094, June 2006.
- [9] Won Namgoong, "Finite-length synthesis filters for non-uniformly time-interleaved analog-to-digital converter," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2002, vol. 4 of *Proc. IEEE ISCAS-2002*, pp. 815–818.
- [10] B. Lacaze, "Equivalent circuits for the PNS2 sampling scheme," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 57, no. 11, pp. 2904–2914, Nov. 2010.
- [11] I. Daubechies and R. DeVore, "Approximating a bandlimited function using very coarsely quantized data : A family of stable sigma-delta modulators of arbitrary order," *Ann. of Math.*, vol. 158, no. 2, pp. 679–710, Sept. 2003.
- [12] M. Chabert and B. Lacaze, "Fast convergence reconstruction formulas for periodic non-uniform sampling of order 2," *Proc. IEEE ICASSP-2012*, March 2012.
- [13] B. Lacaze, "Filtering from PNS2 sampling," *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, vol. 11, no. 1, pp. 43–53, 2012.
- [14] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1968.